

SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

GILLES COURTOIS

Exemple de variété riemannienne et de spectre

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome S9 (1991), p. 65-75

http://www.numdam.org/item?id=TSG_1991__S9__65_0

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Grenoble), 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**RENCONTRES DE THEORIE SPECTRALE ET GEOMETRIE
GRENOBLE 1991
(Aussois du 7 au 14 avril)**

Exemple de variété riemannienne et de spectre

Gilles COURTOIS

**Ecole Polytechnique
Centre de Mathématiques
91128 PALAISEAU
FRANCE**

I. Un exemple de variété homogène : le groupe d'Heisenberg

1) Introduction.

En géométrie riemannienne, les variétés homogènes fournissent une large classe d'exemples qui peuvent illustrer aussi bien les propriétés de base de la théorie que des théorèmes plus récents.

Dans ce premier chapitre, j'ai choisi de décrire certaines propriétés de base de la géométrie du groupe d'Heisenberg. Cette géométrie est suffisamment simple pour être décrite explicitement et suffisamment compliquée pour être intéressante.

DÉFINITION. — Une variété riemannienne (M, g) est homogène si son groupe d'isométries est transitif.

Exemple 1) \mathbb{R}^n muni de sa métrique euclidienne a comme groupe d'isométries $O(n) \ltimes \mathbb{R}^n$.

Exemple 2) La sphère S^n avec la métrique provenant de \mathbb{R}^{n+1} a comme groupe d'isométries $O(n)$.

Pour obtenir des exemples de variétés homogènes, il suffit de considérer un groupe de Lie G et de construire sur G une métrique riemannienne pour laquelle les translations à gauche (ou à droite) sont des isométries. De telles métriques sont appelées métriques invariantes à gauche (ou à droite).

Soit G un groupe de Lie. On note L_x la translation à gauche par x , c'est-à-dire le difféomorphisme de G défini par $L_x(y) = xy$.

Une métrique riemannienne invariante à gauche sur G s'obtient de la façon suivante : on choisit un produit scalaire g_e sur l'espace tangent $T_e G$ de G en e (e = élément neutre de G) et on étend ce produit scalaire à tout espace tangent $T_x G$ par la relation :

$$(1.1) \quad g_x(X, Y) = g_e(dL_{x^{-1}}(X), dL_{x^{-1}}(Y)), \quad X, Y \in T_x G .$$

La métrique euclidienne de \mathbb{R}^n est bien sûr de ce type. De plus, comme \mathbb{R}^n est abélien, les translations à droite sont aussi des isométries pour les métriques invariantes à gauche et toutes les métriques invariantes à gauche (ou à droite) sont isométriques.

Nous allons construire à présent une autre structure de groupe sur \mathbb{R}^3 accompagnée d'une métrique invariante à gauche. On considère le sous-groupe H de $SL(3, \mathbb{R})$

défini par

$$(1.2) \quad H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad x, y, z \in \mathbf{R} \right\}.$$

Le groupe H s'appelle le groupe de Heisenberg de dimension 3. Il est difféomorphe à \mathbf{R}^3 et sa multiplication est donnée par :

$$(1.3) \quad (x, y, z)(x', y', z') = (x + x', y + y', z + z' + xy').$$

L'espace tangent à l'identité $T_e H$ s'identifie à l'algèbre de Lie

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & u & w \\ 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad u, v, w \in \mathbf{R} \right\}.$$

On voit que \mathfrak{h} est engendrée par U, V et W où

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La structure d'algèbre de Lie de \mathfrak{h} est donnée par les relations :

$$(1.4) \quad [U, V] = W, \quad [U, W] = [V, W] = 0.$$

On note $m = (x, y, z)$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de H . Les vecteurs U, V, W de $T_e G$ se prolongent en des champs de vecteurs invariants à gauche $U(m) = dL_m(U), V(m) = dL_m(V), W(m) = dL_m(W)$. Ces champs de vecteurs se calculent aisément, par exemple :

$$U(m) = dL_m(U) = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De même, on voit que $V(m) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $W(m) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Par rapport à la base $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ de $T_m H$, on obtient les relations :

$$(1.5) \quad U(m) = \frac{\partial}{\partial x}, \quad V(m) = \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z}, \quad W(m) = \frac{\partial}{\partial z}.$$

La métrique invariante à gauche g que nous allons étudier est définie sur $T_e H$ en choisissant (U, V, W) comme repère orthonormé. Ainsi, à cause de (1.1) $(U(m), V(m), W(m))$ est un repère orthonormé de $T_m H$ pour tout $m = (x, y, z) \in H$. Dans le système de coordonnées (x, y, z) , la métrique g s'écrit :

$$(1.6) \quad g_m = dx^2 + dy^2 + (dz - xdy)^2.$$

Preuve. — En la développant, on voit que l'égalité (1.6) signifie que la matrice de g_m dans la base $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ de $T_m H$ s'écrit :

$$(1.7) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+x^2 & -x \\ 0 & -x & 1 \end{pmatrix}.$$

En effet, grâce à (1.5) on voit que $g_m(U(m), U(m)) = g_m(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}) = 1$ et $g_m(W(m), W(m)) = g_m(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}) = 1$. De plus, $g_m(V(m), W(m)) = 0 = g_m(\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z})$ donc $g_m(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) = -x$. Enfin, $g_m(V(m), V(m)) = 1 = g_m(\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}) = g_m(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}) - x^2$ de sorte que $g_m(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}) = 1 + x^2$ ce qui achève de prouver (1.6).

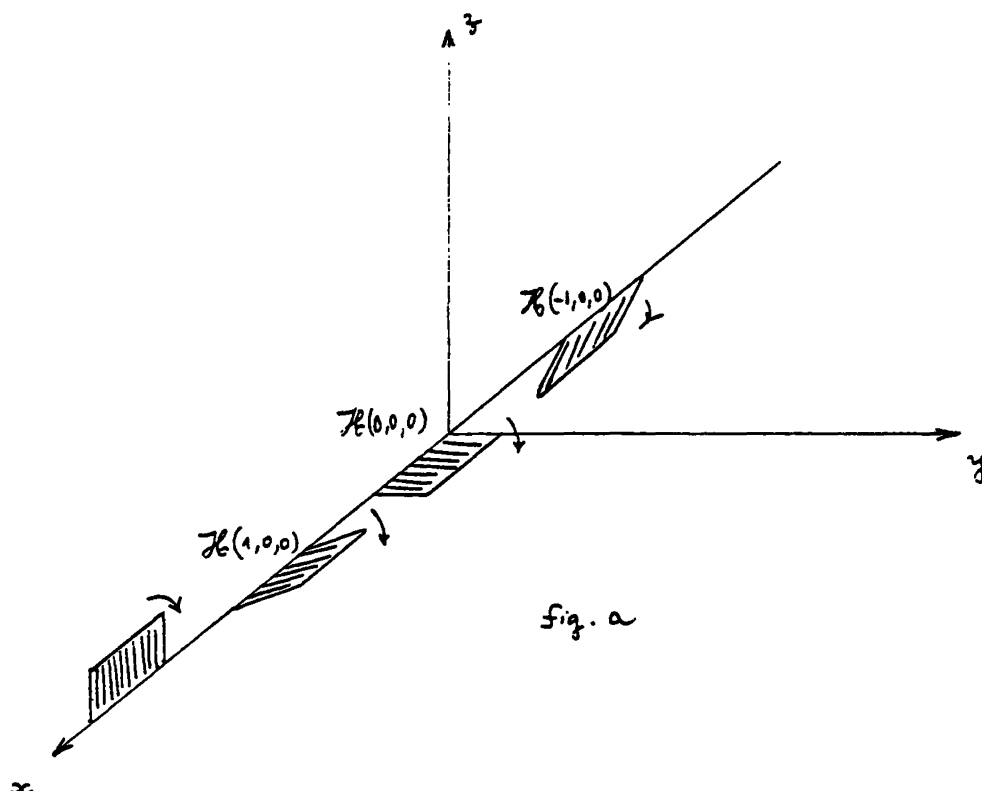
2) Le groupe d'Heisenberg au-dessus de \mathbb{R}^2 .

Le centre Z de H est donné par $Z = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad z \in \mathbb{R} \right\}$, cf. (1.4). De

plus, Z est aussi le sous-groupe dérivé de H , i.e. $Z = [H, H]$ cf. (1.4), et $H/Z \cong \mathbb{R}^2$ à cause de (1.3). Ainsi, la projection $\pi : H \rightarrow H/Z$ réalise une fibration de H au-dessus de \mathbb{R}^2 dont les fibres sont isomorphes à Z , c'est-à-dire à \mathbb{R} . En chaque point $m \in H$ la fibre $m \cdot Z$ admet comme espace tangent $\mathbb{R} \cdot W(m) = \mathbb{R} \cdot \frac{\partial}{\partial z}$ que nous baptiserons *espace vertical* et que nous noterons $V(m)$. Nous appellerons le sous-espace orthogonal (pour g_m) *espace horizontal*, noté $\mathcal{H}(m)$; celui-ci est clairement engendré par $U(m)$ et $V(m)$ et l'espace tangent $T_m H$ se décompose en $T_m H = V(m) \oplus \mathcal{H}(m)$, cette décomposition étant orthogonale. La distribution horizontale cf. fig. a n'est pas intégrable car $[U(m), V(m)] = W(m)$, cf. (1.4).

Au point $m = (x, y, z)$, comme $\mathcal{H}(m)$ est engendré par $U(m) = \frac{\partial}{\partial x}$ et $V(m) = \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}$, on voit que l'équation de $\mathcal{H}(m)$ est :

$$(2.1) \quad dz - xdy = 0.$$



Munissons $\mathbb{R}^2 \approx H/Z$ de la métrique euclidienne $g_0 = dx^2 + dy^2$. Comme la métrique de H s'écrit $g_m = dx^2 + dy^2 + (dz - xdy)^2$ et que l'horizontale $\mathcal{H}(m)$ en m a pour équation $dz - xdy = 0$, cf. (2.1), on voit que $d\pi(m) : \mathcal{H}(m) \longrightarrow T_{\pi(m)}(H/Z)$ est une isométrie.

Cette propriété de $d\pi$ d'être une isométrie en restriction à chaque horizontale fait de $\pi : (H, g) \longrightarrow (H/Z, g_0)$ une *submersion riemannienne*, cf. [C-E] p. 65.

3) La dérivée covariante et la courbure.

Comme la métrique g de H est invariante à gauche, il suffit de connaître $D_X Y$ lorsque X et Y sont des champs de vecteurs invariants à gauche pour savoir calculer $D_X Y$ lorsque X et Y sont des champs de vecteurs quelconques.

En utilisant le fait que D est compatible avec la métrique et est sans torsion, cf. [C-E] p. 2, on vérifie facilement pour X et Y invariants à gauche la relation suivante (cf. [C-E] proposition 3.18 p. 64) :

$$(3.1) \quad D_X Y = \frac{1}{2} \{ [X, Y] - (ad_X)^* Y - (ad_Y)^* X \}$$

où $ad_X : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}$ est définie par $ad_X(Y) = [X, Y]$ et où $(ad_X)^*$ est l'adjoint de ad_X par rapport au produit scalaire g_e . On vérifie facilement que :

$$(3.2) \quad \begin{aligned} D_U U &= 0, & D_U V &= \frac{1}{2} W, & D_U W &= -\frac{1}{2} V \\ D_V U &= -\frac{1}{2} W, & D_V V &= 0, & D_V W &= \frac{1}{2} U \\ D_W U &= -\frac{1}{2} V, & D_W V &= \frac{1}{2} U, & D_W W &= 0 \end{aligned}$$

Preuve. — Exercice :

Ces relations permettent de calculer les courbures sectionnelles. Rappelons que le tenseur de courbure est défini par $R(X, Y, Z) = D_Y D_X Z - D_X D_Y Z - D_{[X, Y]} Z$ et que la courbure sectionnelle d'un plan $P_{X, Y}$ engendré par deux vecteurs orthonormés X et Y est $\sigma(P_{X, Y}) = g(R(X, Y, Y), X)$, cf. [BE1]. Par exemple, on a :

$$(3.3) \quad \begin{cases} \sigma(P_{U, W}) = 3/4 = \sigma(P_{V, W}) \\ \sigma(P_{UV}) = -1/4. \end{cases}$$

Remarque 1. — Nous avons vu au §2 que la projection $\pi : (H, g) \longrightarrow (H/Z, g_0) \approx (\mathbb{R}^2, g_0)$ est une submersion riemannienne. Le plan $P_{U, V}$ est un plan horizontal qui se projette isométriquement sur le plan $P_{\bar{U}, \bar{V}}$ tangent à $H/Z \cong \mathbb{R}^2$. Comme la métrique g_0 sur H/Z est euclidienne, on voit que $\sigma(P_{UV}) = -1/4 \leq \sigma(P_{\bar{U}, \bar{V}}) = 0$. Ce phénomène est général. Soit $\pi \cdot M \longrightarrow N$ une submersion riemannienne, $P_{U, V} \subset TM$ un plan horizontal et $P_{\bar{U}, \bar{V}} \subset TN$ la projection de $P_{U, V}$. Alors les courbures sectionnelles de $P_{U, V}$ et $P_{\bar{U}, \bar{V}}$ sont reliées par la formule d'O'Neill : $\sigma(P_{\bar{U}, \bar{V}}) = \sigma(P_{U, V}) + \frac{3}{4} \| [U, V]^V \|^2$ où $[U, V]^V$ est la composante verticale de $[U, V]$, cf. [C-E].

Remarque 2. — En choisissant comme métrique invariante à gauche sur H la métrique y_ε pour laquelle $(U(m), V(m), \varepsilon^{-1}W(m))$ est un repère orthonormé, on observe que les courbures sectionnelles de g_ε tendent vers 0 avec ε . Ce sont des *métriques presque plates*, cf. [GR], [B-K]. Le cas où ε tend vers $+\infty$ est également intéressant, on obtient dans ce cas une métrique limite $g_\infty = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} g_\varepsilon$ qui est infinie sur les vecteurs verticaux et qui s'appelle métrique de Carnot, cf. [Ha].

4) Les géodésiques.

Les géodésiques sont les courbes $\eta(t)$ telles que $D_{\frac{\partial}{\partial t}} \dot{\eta}(t) = 0$.

Exercice : Calculer les géodésiques en utilisant (3.2).

Soit $(m, p) = ((x, y, z), adx + bdy + cdz) \in T^*H$ un point du cotangent de H . Rappelons que le Hamiltonien $h : T^*H \rightarrow \mathbb{R}$ du flot géodésique est donné par $h((m, p)) = \frac{1}{2} \sum g^{ij}(m) p_i p_j = \frac{1}{2} \|adx + bdy + cdz\|^2$, cf. [CdV]. Dans notre cas, $(g^{i,j}(m)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & x & 1+x^2 \end{pmatrix}$, cf. (1.7), de sorte que :

$$(4.1) \quad h((m, p)) = \frac{1}{2} (a^2 + b^2 + (1+x^2)c^2 + 2bcx) .$$

Les équations des géodésiques sont $\frac{d}{dt}((m, p)) = \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial m} \right)$ cf. [CdV], ce qui donne :

$$(4.2) \quad \begin{cases} \dot{x} = a \\ \dot{y} = b + cx \\ \dot{z} = (1+x^2)c + bx \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dot{a} = -c^2x - bc \\ \dot{b} = 0 \\ \dot{c} = 0 \end{cases}$$

Remarquons que ce flot géodésique possède trois intégrales premières H, b, c et qu'il est ainsi *complètement intégrable*.

Fixons les conditions initiales en $t = 0$ par $x(0) = y(0) = z(0) = 0$ et $(a(0), b(0), c(0)) = (\alpha, \beta, \gamma)$. Remarquons que $(\dot{x}(0), \dot{y}(0), \dot{z}(0)) = (\alpha, \beta, \gamma)$ car la métrique en $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ s'écrit $dx^2 + dy^2 + dz^2$. les équations (4.2) s'intègrent facilement et donnent en supposant $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$:

$$(4.3) \quad \begin{cases} x(t) = \alpha t \\ y(t) = \beta t \\ z(t) = \alpha\beta + 2/2 \end{cases} \quad \text{si } \gamma = 0$$

$$(4.4) \quad \begin{cases} x(t) = (\beta/\gamma) \cos \gamma t + (\alpha/\gamma) \sin \gamma t - \beta/\gamma \\ y(t) = (\beta/\gamma) \sin \gamma t - (\alpha/\gamma) \cos \gamma t + \alpha/\gamma \\ z(t) = ((1+\gamma^2)/2\gamma)t + z_1(t) \end{cases} \quad \text{si } \gamma \neq 0$$

où $z_1(t) = \left(\frac{\alpha\beta}{\gamma^2} \right) \cos \gamma t - \left(\frac{\beta^2}{\gamma^2} \right) \sin \gamma t - \frac{\alpha\beta}{2\gamma^2} \cos 2\gamma t + \left(\frac{\beta^2 - \alpha^2}{4\gamma^2} \right) \sin 2\gamma t - \frac{\alpha\beta}{2\gamma^2}$.

En particulier, on voit que les géodésiques sont des hélices si $\gamma \neq 0$.

Remarque 4.5. — On peut montrer que les équations (4.4) convergent vers les équations (4.3) lorsque γ tend vers 0.

Remarque 4.6. — Les équations (4.3) montrent que si une géodésique $\eta(t)$ est horizontale en un point $\eta(t_0)$ [i.e. $\dot{\eta}(t_0) \in \mathcal{H}(\eta(t_0))$] alors elle reste horizontale en tout point. De plus, la projection $\pi(\eta(t)) = (\alpha t, \beta t) \in (\mathbb{R}^2, g_0)$ est une géodésique. Ces propriétés restent vraies pour une submersion riemannienne quelconque.

Remarque 4.7. — Les géodésiques horizontales sont globalement minimisantes, c'est-à-dire $d(\gamma(s), \gamma(t)) = |s - t|$ pour s, t quelconques. En effet, elles se projettent par π sur des géodésiques de (\mathbb{R}^2, g_0) qui sont clairement globalement minimisantes et π contracte les distances. En revanche, la géodésique verticale $\eta(t) = (0, 0, t)$ (cf. (4.4)) n'est pas globalement minimisante : en effet, la courbe *horizontale* $\gamma(t) = (R(1 - \cos t), R \sin t, R^2(\sin t + \frac{1}{4} \sin 2t + \frac{t}{2}))$ comprise entre $\gamma(0) = (0, 0, 0)$ et $\gamma(2\pi) = (0, 0, \pi R^2)$ a pour longueur $\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2} dt = 2\pi R$ tandis que la géodésique $\eta(t)$ comprise entre $\eta(0) = \gamma(0)$ et $\eta(\pi R^2) = \gamma(2\pi)$ a pour longueur $\ell(\eta) = \pi R^2$.

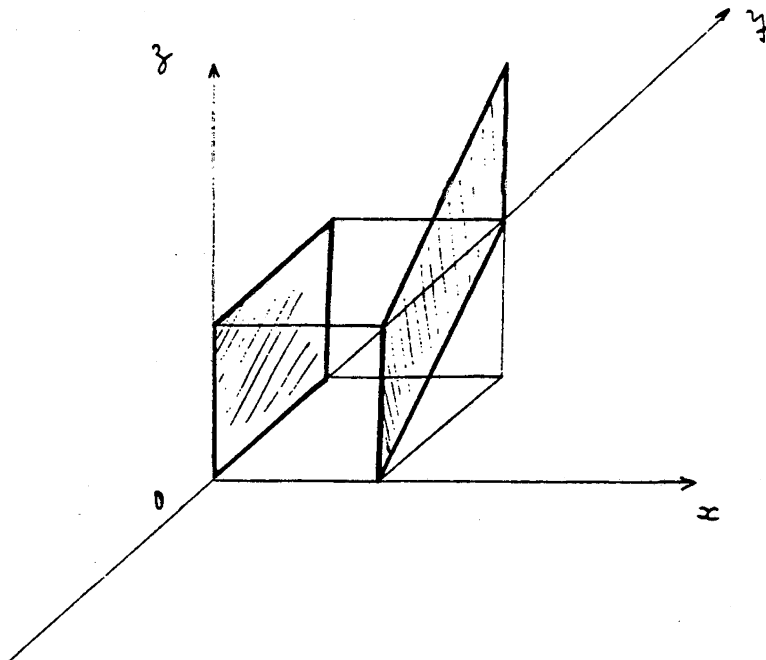
5) Exemple de quotient compact.

Le sous-groupe $\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n & p \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, n, m, p \in \mathbb{Z} \right\}$ de H est un sous-groupe discret d'isométries agissant librement et proprement sur H . Rappelons qu'une action d'un groupe Γ sur un espace H est libre si $\gamma(x) \neq x$ pour $\gamma \in \Gamma \setminus \{e\}$ et $x \in H$ quelconques et propre si à chaque paire (x, y) d'éléments de H tel que $y \notin \Gamma \cdot x$, est associé une paire d'ouverts U_x, V_x de H tels que $x \in U_x, y \in V_y$ et $\gamma U_x \cap V_y = \emptyset, \gamma$ quelconque dans Γ . Comme Γ agit par isométries sur H , le quotient H/Γ hérite naturellement d'une métrique quotient \bar{g} qui fait de la projection $p : H \rightarrow H/\Gamma$ un revêtement riemannien, c'est-à-dire un revêtement tel que dp est une isométrie en tout point, (cf. [G-H-L] p.?). Dans notre exemple, comme tout point $m = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de

H est équivalent modulo Γ à $\begin{pmatrix} 1 & x' & z' \\ 0 & 1 & y' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où $0 \leq x', y', z' < 1$, le quotient $X = H/\Gamma$ est clairement compact. De plus, comme Z est central, X admet une structure de fibré en cercle sur \mathbb{T}^2 ainsi qu'on peut le voir sur le diagramme suivant :

$$(5.1) \quad \begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{p} & X = H/\Gamma \\ \downarrow \pi & & \downarrow Z/Z \cap \Gamma = S^1 \\ H/Z = \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & (H/Z)/(\Gamma/Z \cap \Gamma) = \mathbb{T}^2 \end{array}$$

Il peut être également agréable de voir $X = H/\Gamma$ comme fibré en tore T^2 sur le cercle S^1 , cf. figure 5.2.



Le point (x, y, z) est identifié à $(0, m, p)(x, y, z) = (x, y + m, z + p)$, ce qui veut dire qu'au-dessus de chaque $x \in \mathbb{R}$ il y a un tore $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

De plus, $(0, y, z)$ est identifié à $(1, 0, 0)(0, y, z) = (1, y, z + y)$ ce qui signifie que le tore $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ au-dessus de $x = 0$ est identifié au tore $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ au-dessus de $x = 1$ par l'application nilpotente $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$.

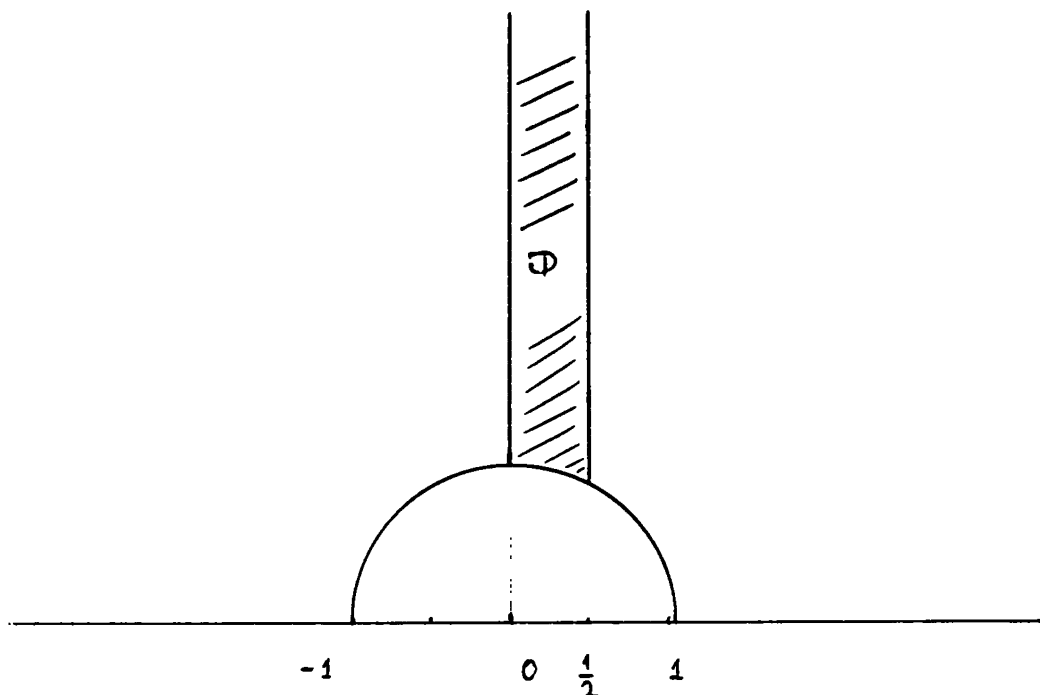
II. Le spectre des tores plats et de la sphère S^n

1) Les tores plats.

On considère le sous-groupe discret d'isométries de l'espace euclidien \mathbb{R}^n engendré par les translations de vecteurs $(a_i)_{i=1}^n$ où les a_i forment une base de \mathbb{R}^n . On le note $\Gamma = \mathbb{Z}a_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}a_n$. Comme dans I-5, la variété quotient $T_\Gamma = \mathbb{R}^n/\Gamma$ hérite de la métrique euclidienne de \mathbb{R}^n et la variété riemannienne ainsi obtenue s'appelle un *tore plat*.

Soit f une isométrie de \mathbb{R}^n et $\Gamma = f(\Gamma')$. L'application f induit clairement une isométrie \bar{f} entre les tores plats \mathbb{R}^n/Γ et \mathbb{R}^n/Γ' . En fait, deux tores plats isométriques T et T' proviennent toujours de réseaux Γ et Γ' où $\Gamma' = f(\Gamma)$, avec f isométrie de \mathbb{R}^n , cf. [G-H-L] p. 58.

L'ensemble des réseaux orientés Γ de volume fixé égal à un de \mathbb{R}^n modulo isométries est en bijection avec $SO(n, \mathbb{R}) \backslash SL(n, \mathbb{R}) / SL(n, \mathbb{Z})$. En dimension deux, un domaine fondamental de l'ensemble des tores plats de volume fixé égal à un et modulo isométries est donné par $D = \{z \in \mathbb{C} / |z| \geq 1, \operatorname{Re}(z) \in [0, 1/2[\}$ cf. [G-H-L] p. 59.



2) Le spectre des tores plats [cf. [G-H-L] p.174, [B-G-M] p.146].

Le spectre des variétés compactes est presque toujours non calculable. Le cas de S^1 , exceptionnel, se calcule en résolvant l'équation différentielle $f'' = \lambda f$ sur S^1 , ce qui donne comme spectre $S = \{4\pi^2 n^2\}_{n=0}^{\infty}$. L'espace propre associé à $4\pi n^2$, $n \neq 0$, est de dimension deux, engendré par les fonctions $e^{\pm 2i\pi n x}$.

Dans le cas des tores plats $T = \mathbb{R}^n / \Gamma$, une liste de fonctions propres se détecte facilement, il reste ensuite à montrer que cette liste est exhaustive.

Soit $\Gamma = \mathbb{Z}a_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}a_n$ un réseau et $T_\Gamma = \mathbb{R}^n / \Gamma$ le tore plat associé. Le réseau dual $\Gamma^* = \mathbb{Z}a_1^* \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}a_n^*$ engendré par la base duale $(a_i^*)_{i=1}^n$, (i.e. $\langle a_i, a_j^* \rangle = \delta_{ij}$) vérifie

$$(2.1) \quad \Gamma^* = \{\gamma^* \in \mathbb{R}^n / \langle \gamma, \gamma^* \rangle \in \mathbb{Z} \forall \gamma \in \Gamma\}.$$

la fonction $f_{\gamma^*} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f_{\gamma^*}(x) = e^{2i\pi \langle x, \gamma^* \rangle}$ vérifie :

$$(2.2) \quad \Delta f_{\gamma^*} = 4\pi^2 \|\gamma^*\|^2.$$

De plus, en vertu de (2.1), pour chaque γ^* dans Γ^* , f_{γ^*} est bien définie sur $T_\Gamma = \mathbb{R}^n / \Gamma$:

$$(2.3) \quad f_{\gamma^*}(x + \gamma) = f_{\gamma^*}(x) \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

Le spectre de T_Γ contient donc l'ensemble $S = \{4\pi^2 \|\gamma^*\|^2\}_{\gamma^* \in \Gamma^*}$. En fait, le spectre de T_Γ est exactement l'ensemble S . Pour voir cela, il suffit de vérifier que la

famille $\{f_{\gamma^*}\}_{\gamma^* \in \Gamma^*}$ est dense dans $L^2(T_\Gamma)$ puisque la somme des espaces propres est dense dans $L^2(T_\Gamma)$ en vertu du :

THÉORÈME 2.4 [G-H-L], [BE]. — Soit (M, g) une variété riemannienne compacte. Le spectre de Δ est une suite infinie $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \rightarrow +\infty$. Chaque valeur propre λ_i est de multiplicité finie et la somme des espaces propres $E(\lambda_i)$ est dense dans $L^2(M)$.

Soit $(x_i)_{i=1}^n$ les coordonnées de \mathbb{R}^n associées à la base $(a_i)_{i=1}^n$. Une fonction $f : T_\Gamma = \mathbb{R}^n / \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ peut être vue comme une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$, telle que $f(x_1 + k_1, \dots, x_n + k_n)$ pour $(k_i)_{i=1}^n \in \mathbb{Z}^n$, c'est-à-dire comme une fonction de $S^1 \times \dots \times S^1$ à valeurs dans \mathbb{C} . D'après le cas de S^1 , on voit par récurrence que si $f \in L^2(T_\Gamma)$, $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{K=(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n} a_K e^{2i\pi(k_1 x_1 + \dots + k_n x_n)}$. Or $e^{2i\pi(k_1 x_1 + \dots + k_n x_n)} = e^{2i\pi(\gamma^*, x)} = f_{\gamma^*}(x)$ où $\gamma^* = \sum_{i=1}^n k_i a_i^* \in \Gamma^*$, donc $\{f_{\gamma^*}\}_{\gamma^* \in \Gamma^*}$ est dense dans $L^2(T_\Gamma)$.

3) Spectre de S^n [cf. [G-H-L] p.174].

Soit $(r, u) \in \mathbb{R}^{+*} \times S^n$ les coordonnées polaires de \mathbb{R}^{n+1} . Le laplacien de \mathbb{R}^{n+1} s'écrit dans ces coordonnées

$$(3.1) \quad \Delta_{\mathbb{R}^{n+1}} = -\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{n}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^n}.$$

Les polynômes homogènes harmoniques de \mathbb{R}^{n+1} restreints à S^n sont des fonctions propres de S^n . En effet, soit P un polynôme homogène harmonique de degré k de \mathbb{R}^{n+1} , c'est-à-dire $P = r^k \cdot P \upharpoonright S^n$ et $\Delta_{\mathbb{R}^{n+1}} P = 0$. A cause de (3.1), on a :

$$\Delta_{\mathbb{R}^{n+1}} P = 0 = -k(k-1)r^{k-2}P \upharpoonright S^n - nkr^{k-2}P \upharpoonright S^n + r^{k-2}\Delta_{S^n}(P \upharpoonright S^n)$$

donc

$$\Delta_{S^n}(P \upharpoonright S^n) = k(n+k-1)P \upharpoonright S^n.$$

En fait, nous avons là toutes les fonctions propres de S^n . Pour voir cela, il suffit de vérifier que $\bigoplus_{k \geq 0} H_k$ est dense dans $L^2(S^n)$ où H_k est l'espace des polynômes homogènes harmoniques de degré k de \mathbb{R}^{n+1} restreints à S^n . Ceci vient du fait que $\bigoplus_{k \geq 0} P_k$ est dense dans $L^2(S^n)$ où P_k est l'espace des polynômes homogènes de degré k de \mathbb{R}^{n+1} restreints à S^n et du fait que :

$$(3.2) \quad \begin{aligned} P_{2k} &= H_{2k} \oplus H_{2k-2} \oplus \dots \oplus H_0 \\ P_{2k+1} &= H_{2k+1} \oplus H_{2k-1} \oplus \dots \oplus H_1 \end{aligned}$$

Les relations (3.2) se montrent par récurrence sur k . Elles sont immédiates pour $k = 0$ et il faut vérifier, par exemple, que $P_{2k} = H_{2k} + P_{2k-2}$. En fait la somme précédente est orthogonale pour le produit scalaire de $L^2(S^n)$. Notons Q_{2k} le supplémentaire orthogonal de P_{2k-2} dans P_{2k} , c'est-à-dire $P_{2k} = Q_{2k} \oplus P_{2k-2}$.

Le groupe $SO(n+1)$ agit par isométries sur P_{2k}, Q_{2k}, H_{2k} et pour montrer que $Q_{2k} = H_{2k}$, il suffit de voir que l'action de $SO(n+1)$ sur Q_{2k} est irréductible (c'est-à-dire qu'il n'existe pas de sous-espace strict non trivial de Q_{2k} stable par $SO(n+1)$). Cela découle des deux lemmes suivants :

LEMME 3.3. — Soit V un sous-espace de dimension finie de $C^\infty(S^n)$ sur lequel $SO(n+1)$ agit par isométries. Soit $Z(V)$ le sous-espace des fonctions de V qui ne dépendent que de la distance au pôle nord. Alors $\dim Z(V) \geq 1$ et si $\dim Z(V) = 1$, l'action de $SO(n+1)$ sur V est irréductible.

LEMME 3.4. — $\dim Z(Q_{2k}) = 1$.

Preuve. — cf. [G-H-L] p.176.

4) Remarque.

D'autres exemples de spectre se calculent complètement : c'est le cas par exemple du disque, du rectangle, de l'ellipse, du secteur circulaire, des triangles équilatéral, isocèle rectangle, demi-équilatéral, cf. [M-F], [P-S], [BE2], ainsi que des variétés d'Heisenberg, cf. [G-W]. Cette liste n'est bien sûr pas complète.

Références

- [C-E] CHEEGER J., EBIN D. — *Comparison theorems in Riemannian Geometry*, North Holland, Amsterdam, 1975.
- [BE] BÉRARD P. — *Spectral Geometry : Direct and Inverse Problems*, Lecture Notes in Math. Springer, 1207 (1986), .
- [BE1] BÉRARD P. — *Conférence de ce colloque d'Aussois*,.
- [BE2] BÉRARD P. — *Spectres et groupes cristallographiques I, Domaines euclidiens*, Invent. Math., 58 (1980), 179–199.
- [GR] GROMOV M. — *Almost flat manifolds*, J. Differential Geom., 13 (1978), 231–241.
- [B-K] BUSER P., KARCHER H. — *Gromov's almost flat manifolds*, Astérisque, 81 (1981), .
- [Ha] HAMENSTÄDT U. — *Some regularity theorems for Carnot Caratheodory metrics*, J. Differential Geom., 32 (1990), 819–850.
- [CdV] COLIN DE VERDIÈRE Y. — *Conférence à ce colloque d'Aussois*,.
- [G-H-L] GALLOT S., HULIN D., LAFONTAINE J. — *Riemannian Geometry*, Springer Verlag, Berlin, 1987.
- [B-G-M] BERGER M., GAUDUCHON P., MAZET E. — *Le spectre d'une variété Riemannienne*, Lecture Notes in Math. Springer, 194 (1971), Berlin-Heidelberg.
- [G-W] GORDON C.S., WILSON E.N. — *The spectrum of the Laplacian on Riemannian Heisenberg manifolds*, Michigan Math. J., 33 (1986), 253–271.