

# SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

COLETTE ANNÉ

## **Perturbation du laplacien de Hodge par excision de petites boules**

*Séminaire de Théorie spectrale et géométrie*, tome 10 (1991-1992), p. 85-92

[http://www.numdam.org/item?id=TSG\\_1991-1992\\_\\_10\\_\\_85\\_0](http://www.numdam.org/item?id=TSG_1991-1992__10__85_0)

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Chambéry-Grenoble), 1991-1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## PERTURBATION DU LAPLACIEN DE HODGE PAR EXCISION DE PETITES BOULES

par *Colette ANNÉ*

Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne connexe compacte (orientée) de dimension  $n \geq 3$ , et soient  $a_1, \dots, a_N$  des points distincts de  $M$ . Pour  $\varepsilon < \text{Inj}(M)$  le rayon d'injectivité de  $M$ , on définit  $M_\varepsilon = M - \bigcup_{j=1}^N B(a_j, \varepsilon)$ .

La métrique  $g$  définit un produit scalaire  $(\cdot, \cdot)$  sur le fibré  $\Lambda^p M$  de  $p$ -covecteurs antisymétriques, on note alors  $\delta$  l'adjoint formel, pour le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  induit sur les formes différentielles, de la différentielle  $d$ . Si  $*$  est l'opérateur de Hodge,  $\delta = (-1)^{n(p+1)+1} * d*$  sur les  $p$ -formes. La métrique définit aussi sur  $C^\infty(\Lambda^p M)$  une connexion de Levi-Civita :  $\nabla$ .

On s'intéresse ici à la convergence du spectre du Laplacien  $\Delta = (d+\delta)^2$  sur  $M_\varepsilon$ , et aussi à la convergence des formes propres. Ce texte est une présentation de l'article [AC].

### 1. Ellipticité – Conditions au bord

$\Delta$  est elliptique sur  $M$ , de domaine  $H^2(\Lambda^* M)$  et autoadjoint. Mais  $\Delta$  n'est elliptique sur  $M_\varepsilon$  que pour certaines conditions au bord. Nous regardons trois conditions différentes :

- (I)  $*\Phi|_{\partial M_\varepsilon} = 0$  et  $*d\Phi|_{\partial M_\varepsilon} = 0$ .
- (II)  $\Phi|_{\partial M_\varepsilon} = 0$  et  $\delta\Phi|_{\partial M_\varepsilon} = 0$ .
- (III)  $\Phi|_{\partial M_\varepsilon} = 0$  et  $*\Phi|_{\partial M_\varepsilon} = 0$ .

Il est à remarquer qu'une condition ne portant que sur les dérivées ( $*d\Phi|_{\partial M_\varepsilon} = 0$  et  $\delta\Phi|_{\partial M_\varepsilon} = 0$ ) n'est pas elliptique bien que auto-adjointe. En effet l'ellipticité entraîne l'inégalité de Friedrichs :  $\|\Phi\|_2 \leq C(\|\Delta\Phi\| + \|\Phi\|_1)$ , qui compare la norme de l'opérateur et celle de Sobolev. Pourtant  $\Phi = z^k dz$  sur  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{R}^2, \|z\| < 1\}$  vérifie  $d\Phi = \delta\Phi = 0$ . Mais  $\|\Phi\|_2^2 = \mathcal{O}(k^3)$  et  $\|\Phi\|_1^2 = \mathcal{O}(k)$ .

Le problème III se traite comme les fonctions avec conditions de Dirichlet : il y a inclusion des domaines de la forme quadratique et monotonie des valeurs propres (voir [A]).

Les problèmes I et II sont en dualité avec \*. Nous ne parlerons donc plus que du problème (I) qui est la généralisation du problème de Neumann sur les fonctions. Notons  $\Delta_a = (\Delta, I)$ .

Remarquons que  $(\Delta, I)$  est le carré de  $D = (D = d + \delta, * \Phi|_{\partial M_\varepsilon} = 0)$  qui est lui-même elliptique.

Posons  $q(\Phi) = \|d\Phi\|^2 + \|\delta\Phi\|^2$  et  $\|\Phi\|_q^2 = \|\Phi\|^2 + q(\Phi)$ .

$$H_{\text{nor}}^1(\Lambda^p M_\varepsilon) = \{\Phi \in H^1(\Lambda^p M_\varepsilon) / * \Phi|_{\partial M_\varepsilon} = 0\}.$$

## 2. Inégalité de Friedrichs

PROPOSITION. —  $\exists C > 0; \forall \varepsilon < \text{Inj}(M) \quad \Phi \in H_{\text{nor}}^1(\Lambda^p M_\varepsilon)$

$$|q(\Phi) - \|\nabla\Phi\|^2| \leq C \left( \int_{M_\varepsilon} |\Phi|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\partial M_\varepsilon} |\Phi|^2 \right)$$

et

$$\int_{\partial M_\varepsilon} |\Phi|^2 \leq C (\|\nabla\Phi\| \|\Phi\| + \frac{1}{\varepsilon} \|\Phi\|^2)$$

d'où

$$\|\Phi\|_1 \leq C (\sqrt{q(\Phi)} + \frac{1}{\varepsilon} \|\Phi\|).$$

*Démonstration.* — La première formule vient de la formule de Weizenböck :

$$(\Delta\Phi, \Phi) = \frac{1}{2} \Delta|\Phi|^2 + |\nabla\Phi|^2 + \mathcal{R}_p(\Phi, \Phi)$$

où  $\mathcal{R}_p$  est un terme de courbure de  $M$ . Cela donne en intégrant sur  $M_\varepsilon$ , avec :

$$\int_{M_\varepsilon} (\Delta\Phi, \Phi) = \|d\Phi\|^2 + \|\delta\Phi\|^2 + \int_{\partial M_\varepsilon} \delta\Phi \wedge * \Phi - \Phi \wedge * d\Phi$$

et

$$\int_{M_\varepsilon} \frac{1}{2} \Delta|\Phi|^2 = - \int_{\partial M_\varepsilon} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} |\Phi|^2 = - \int_{\partial M_\varepsilon} \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \Phi, \Phi \rangle$$

écrivons  $\Phi = \alpha + dr \wedge \beta$  (donc  $\beta|_{\partial M_\varepsilon} = 0$ ) et  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} = \frac{\partial}{\partial r} + \Gamma_n$ .

Enfin  $d_r$  est la différentielle sur la sphère de rayon  $r$  \*, son opérateur de Hodge et  $\delta_r$  l'adjoint de  $d_r$ . On a les formules :

$$\begin{aligned} d\Phi &= d_r \alpha + dr \wedge \left( \frac{\partial}{\partial r} \alpha - d_r \beta \right) \\ \delta\Phi &= \delta_r \alpha - *_{r^{-1}} \frac{\partial}{\partial r} (*_r \beta) - dr \wedge \delta_r \beta. \end{aligned}$$

On vérifie alors (avec  $\beta|_{\partial M_\epsilon} = 0$ ) que :

$$\|\nabla\Phi\|^2 - q(\Phi) = \int_{\partial M_\epsilon} (\Gamma_n \alpha, \alpha) + \int_{M_\epsilon} \mathcal{R}_p(\Phi, \Phi)$$

↑  
mesure les courbures principales du bord.

Pour la deuxième formule ( $\Phi$  est à support dans une boule) :

$$\begin{aligned} \int_{\partial M_\epsilon} |\Phi|^2 \text{vol}_{S_r} &= \int_{M_\epsilon} d(|\Phi|^2 \text{vol}_{S_r}) \\ &= \int \frac{\partial}{\partial r} (|\Phi|^2) d \text{vol} + \int |\Phi|^2 d \wedge \underbrace{\frac{\partial}{\partial r} (\text{vol}_{S_r})}_{\approx \frac{1}{r} \text{vol}_{S_r}} \end{aligned}$$

■

Ainsi  $\|\cdot\|_q$  et  $\|\cdot\|_1$  sont toujours équivalentes mais la comparaison est de plus en plus mauvaise. Il nous faudra donc toujours raisonner avec  $\|\cdot\|_q$ .

### 3. Multiplicité de 0

D'après la théorie de Hodge :

$$\dim \ker D_a = \dim \ker \Delta_a = \dim H^p(M_\epsilon, \mathbf{R}) .$$

(En effet, soit  $\Phi \in C^\infty(M_\epsilon)$ , avec  $d\Phi = 0$ .  $\Delta_a$  étant elliptique et autoadjoint il existe  $\Phi_0$  et  $\Psi$  dans le domaine de  $\Delta_a$  avec  $\Phi = \Phi_0 + \Delta\Psi$  et  $\Delta\Phi_0 = 0$ .  $\Delta_a$  admettant une paramétrix (voir [H] Chap. 20.1) il est Fredholm,  $\Phi_0$  est de classe  $C^\infty$  et  $\Psi$  aussi. Enfin

$$d\Phi = 0 \Rightarrow d(\delta d\Psi) = 0 \Rightarrow 0 = \langle d\delta d\Psi, d\Psi \rangle = \langle \delta d\Psi, \delta d\Psi \rangle$$

car  $*d\Psi|_{\partial M_\epsilon} = 0$ . Donc

$$\delta d\Psi = 0 \Rightarrow \Phi = \Phi_0 + d\delta\Psi.)$$

Mais  $\dim H^p(M_\epsilon, \mathbf{R})$  se déduit de  $\dim H^p(M, \mathbf{R})$  grâce à la suite longue de Mayer-Vietoris du recouvrement  $M = M_\epsilon \cup U_\epsilon$  où  $U_\epsilon = \bigcup_{j=1}^N B(a_j, 2\epsilon)$  :

$$\begin{aligned} \dots H^p(U_\epsilon \cap M_\epsilon, \mathbf{R}) \rightarrow H^{p+1}(M, \mathbf{R}) \rightarrow H^{p+1}(M_\epsilon, \mathbf{R}) \oplus H^{p+1}(U_\epsilon, \mathbf{R}) \\ \rightarrow H^{p+1}(U_\epsilon \cap M_\epsilon, \mathbf{R}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

$U_\epsilon \cap M_\epsilon$  est homotope à l'union disjointe de  $N$  sphères  $S^{n-1}$ ,  $H^0(U_\epsilon, \mathbf{R}) = \mathbf{R}^N$  et  $H^k(U_\epsilon, \mathbf{R}) = \mathbf{R}^N$  si  $k \geq 1$  donc ( $p = -1$ ) :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathbf{R} & \rightarrow & \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}^N & \rightarrow & \mathbf{R}^N \rightarrow 0 \\ & & & & \text{Inj} & \Rightarrow & \text{Surj} \end{array}$$

et la flèche :  $H^0(U_\varepsilon \cap M_\varepsilon, \mathbf{R}) \rightarrow H^1(M, \mathbf{R})$  est nulle, donc pour  $1 \leq k < n - 1$  :

$$0 \rightarrow H^k(M, \mathbf{R}) \xrightarrow{\cong} H^k(M_\varepsilon, \mathbf{R}) \rightarrow 0$$

enfin :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow H^{n-1}(M, \mathbf{R}) & \rightarrow & H^{n-1}(M_\varepsilon, \mathbf{R}) & \rightarrow & H^{n-1}(U_\varepsilon \cap M_\varepsilon, \mathbf{R}) & \rightarrow & H^n(M, \mathbf{R}) \rightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \parallel & & \parallel \\ & & \text{de noyau} & & & & \\ & & \mathbf{R}^{N-1} & \leftarrow & \mathbf{R}^N & & \mathbf{R} \end{array}$$

donc pour  $k < n - 1$  :

$$\dim H^k(M_\varepsilon, \mathbf{R}) = \dim H^k(M, \mathbf{R})$$

et

$$\dim H^{n-1}(M_\varepsilon, \mathbf{R}) = \dim H^{n-1}(M, \mathbf{R}) + (N - 1).$$

#### 4. Le théorème

**THÉORÈME.** — Soient  $\mu_0(\varepsilon) \leq \dots \leq \mu_k(\varepsilon) \dots$  le spectre de  $\Delta_a$  sur les  $p$ -formes de  $M_\varepsilon$ ,  $\lambda_0 \leq \dots \leq \lambda_k \dots$  le spectre de  $\Delta_a$  sur les  $p$ -formes de  $M$ .

• Si  $p \neq n - 1$   $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_k(\varepsilon) = \lambda_k$  et les espaces propres correspondant sont à distance  $O(\varepsilon^{\frac{n-2}{2}})$ .

• Si  $p = n - 1$  et  $b_{n-1} = \dim H^{n-1}(M)$ .

$$k < b_{n-1} + N - 1 \Rightarrow \mu_k(\varepsilon) = 0$$

$$k = b_{n-1} + N - 1 \Rightarrow \mu_k(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow \infty} 0$$

$$k > b_{n-1} + N - 1 \Rightarrow \lim \mu_k(\varepsilon) = \lambda_{k-N}.$$

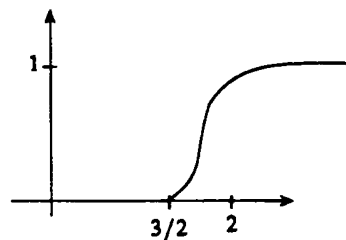
et même chose pour les espaces propres.

*Remarque.* — Soit  $f_\varepsilon$  la fonction propre normée de  $M_\varepsilon$ , nulle au bord dont la valeur propre  $\lambda_\varepsilon$  tend vers 0. Alors  $f_\varepsilon$  tend vers la fonction constante 1 alors  $*df_\varepsilon$  est la  $(n - 1)$  forme propre de  $\Delta_a$  relative à  $\mu_{b_{n-1}+N-1}(\varepsilon) = \lambda_\varepsilon$ , cette forme propre tend vers 0; plus précisément on peut remarquer que  $\|*df_\varepsilon\| / \|*df_\varepsilon\|$  tend faiblement vers 0.

#### 5. Démonstration

**5.1.**  $\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_k(\varepsilon) \leq \lambda_k$ .

Soit  $\chi$  la fonction de graphe :



et  $\chi_\varepsilon(m) = \chi\left(\frac{d(a,m)}{\varepsilon}\right)$  le point  $a$  étant un des  $a_j$ .  $\|d\chi_\varepsilon\|^2 = O(\varepsilon^{n-2})$  et  $\|(1 - \chi_\varepsilon)\|^2 = O(\varepsilon^n)$ .

Soit alors  $\Psi \in C^\infty(\Lambda^p M)$

$$\|\Psi - \chi_\varepsilon \Psi\|_q \leq C\varepsilon^{\frac{n-2}{2}} (|\Psi|_\infty + |\nabla \Psi|_\infty).$$

Soient enfin  $\Psi_0, \dots, \Psi_k$  les  $(k+1)$  premières formes propres normées de  $\Delta$  sur  $M$ , et  $E$  l'espace vectoriel engendré par  $\chi_\varepsilon \Psi_0, \dots, \chi_\varepsilon \Psi_k$ . On voit que

$$\sup_{\varphi \in E - \{0\}} \frac{a(\varphi)}{\|\varphi\|^2} \leq \frac{\lambda_k + O(\varepsilon^{\frac{n-2}{2}})}{1 - O(\varepsilon^{n/2})}$$

on conclut alors avec le mini-max.

5.2. Si  $p \neq (n-1)$   $\lambda_k \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_k(\varepsilon)$ .

Il faut ici transporter les formes de  $M_\varepsilon$  sur  $M$ . Soit  $R < \text{Inj}(M)$ . Regardons les formes définies sur la boule  $B(0, R)$  et nulles au bord.

PROPOSITION. —  $\exists P_\varepsilon : H_{0, \text{nor}}^1(\Lambda^p(B(a, R) - B(a, \varepsilon))) \rightarrow H_0^1(\Lambda^p B(a, R))$  uniformément borné en  $\varepsilon$  pour la  $q$ -norme (toujours si  $p \neq (n-1)$ ).

5.2.0. Pour  $p = 0$  ce résultat est montré dans [A].

Pour  $p = n$  le prolongement par 0 convient.

5.2.1. Cette proposition est vraie pour la métrique euclidienne avec pour  $P_\varepsilon$  le prolongement harmonique.

Démonstration. — Regardons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H_{\text{nor}}^1(\Lambda^p(\mathbb{R}^n - B(0, \varepsilon))) & \xrightarrow{P_\varepsilon} & H^1(\Lambda^p \mathbb{R}^n) \\ \downarrow h_\varepsilon^* & & \uparrow h_{1/\varepsilon}^* \\ H^1(\Lambda^p(\mathbb{R}^n - B(0, 1))) & \xrightarrow{P_1} & H^1(\Lambda^p \mathbb{R}^n) \end{array}$$

où  $h_\varepsilon(x) = \varepsilon x$ . On a les formules :

$$\begin{aligned} \|h_\varepsilon^* \Phi\|^2 &= \varepsilon^{2p-n} \|\Phi\|^2 \\ \|dh_\varepsilon^* \Phi\|^2 &= \varepsilon^{2p+2-n} \|d\Phi\|^2 \\ \|\delta h_\varepsilon^* \Phi\|^2 &= \varepsilon^{2p+2-n} \|\delta\Phi\|^2. \end{aligned}$$

En effet  $\|h_\varepsilon^* \Phi\|^2 = \int |\varepsilon^p \Phi(\varepsilon x)|^2 dx = \varepsilon^{2p-n} \int |\Phi(\varepsilon x)|^2 d(\varepsilon x)$ . La deuxième découle de la première car  $d$  et  $h_\varepsilon^*$  commutent. Enfin  $*$  est une isométrie donc :

$$\|\delta h_\varepsilon^* \Phi\|^2 = \|d * h_\varepsilon^* \Phi\|^2 = \|d \varepsilon^{2p-n} h_\varepsilon^* * \Phi\|^2 = \varepsilon^{4p-2n} \varepsilon^{2(n-p)+2-n} \|d * \Phi\|^2$$

d'après la deuxième égalité.

$P_1$  est continu. Posons alors :  $\Phi = \alpha + dr \wedge \beta$ .  $P_\varepsilon(\Phi) = P_\varepsilon(\alpha)$ .

$$\begin{aligned} \|P_\varepsilon \Phi\|^2 &= \varepsilon^{n-2p} \|P_1 \circ h_\varepsilon^* \Phi\|^2 \leq C \varepsilon^{n-2p} (\|h_\varepsilon^* \Phi\|^2 + q(h_\varepsilon^* \Phi)) \\ &\leq C \varepsilon^{n-2p} (\varepsilon^{2p-n} \|\Phi\|^2 + \varepsilon^{2p+2-n} q(\Phi)) \\ &\leq C(1 + \varepsilon^2) \|\Phi\|_q^2. \end{aligned}$$

On voit tout de suite qu'on ne peut pas faire la même chose avec  $q(P_\varepsilon \Phi)$ . Mais :

$$\begin{aligned} q(P_\varepsilon \Phi) &= q(P_\varepsilon \alpha) = 1/\varepsilon^{2p+2-n} q(P_1 h_\varepsilon^* \alpha) \\ &= 1/\varepsilon^{2p+2-n} \left( q(P_1(h_\varepsilon^* \alpha)|_{B_1}) + q(h_\varepsilon^* \alpha) \right). \end{aligned}$$

$\tilde{P}_1 : H_{\text{nor}}^1(\Lambda^p(B_2 - B_1)) \rightarrow H^1(\Lambda^p B_2)$  est aussi continu. Donc :

$$q(P_1(h_\varepsilon^* \alpha)|_{B_1}) \leq C \left( \|(h_\varepsilon^* \alpha)|_{B_2 - B_1}\|^2 + q(h_\varepsilon^* \alpha|_{B_2 - B_1}) \right).$$

Mais  $h_\varepsilon^* \alpha \in H_{\text{nor}}^1(\Lambda^p(B_2 - B_1))$  et  $p \neq n - 1$  donc 0 n'est pas valeur propre de  $\Delta_a$  sur  $B_2 - B_1 \Rightarrow \|(h_\varepsilon^* \alpha)|_{B_2 - B_1}\|^2 \leq \frac{1}{\lambda_1(B_2 - B_1)} q(h_\varepsilon^* \alpha|_{B_2 - B_1})$ . Donc :

$$\begin{aligned} q(P_\varepsilon \Phi) &\leq C^1 / \varepsilon^{2p+2-n} q(h_\varepsilon^* \alpha) \\ &\leq C q(\alpha). \end{aligned}$$

LEMME. —  $\exists C > 0$  tel que  $q(\alpha) \leq C q(\Phi)$ .

La démonstration de ce lemme est assez délicate et technique. On la trouve détaillée dans [AC].

5.2.2. Sur la boule de  $M$  on considère le même  $P_\varepsilon$ , c'est-à-dire le prolongement harmonique pour la métrique  $g_0$  égale partout à  $g(0)$  dans les coordonnées polaires. On note systématiquement avec un indice 0 ce qui est défini à partir de  $g_0$ .

On a alors la proposition suivante :

PROPOSITION. — Il existe  $C > 0$  indépendant de  $\varepsilon$  tel que

$$\forall \Phi \in H_{0, \text{nor}}^1(B(a, R) - B(a, \varepsilon))$$

(c'est-à-dire  $\Phi$  totalement nulle au rayon  $R$  et  $\text{nor } \Phi$  nulle au rayon  $\varepsilon$ ).

$$\begin{aligned} |q(\Phi) - q_0(\Phi)| &\leq C(|\Phi|^2 + q(\Phi)) \\ &\leq C(|\Phi|_0^2 + q_0(\Phi)). \end{aligned}$$

Démonstration. — Il existe un opérateur  $A$  de la fibre de  $\Lambda^p M$  tel que  $(\Phi, \Psi) = (\Phi, A\Psi)_0$  et comme on est en coordonnées polaires  $A = I + O(r^2)$ . Les formes volumes s'écrivent  $\omega = f\omega_0$ . Alors

$$*\Phi = *_0 f A \Phi = B *_0 \Phi \quad \text{où} \quad B = I + O(r^2).$$

Les métriques  $g$  et  $g_0$  sont comparables. Le seul problème de cette proposition est donc la comparaison de  $\|d * \Phi\|^2$  et  $\|d * \Phi\|^2$ .

$$\begin{aligned} \left| \|d * \Phi\| - \|d * \Phi\| \right| &\leq \|d(I - B) * \Phi\| \\ &\leq C(\|\Phi\| + \|r^2 \nabla \Phi\|) \\ \left| \|r^2 \nabla \Phi\| - \|\nabla(r^2 \Phi)\| \right| &< C\|\Phi\|. \end{aligned}$$

D'après les inégalités de Friedrichs

$$\left| q(r^2 \Phi) - \|\nabla(r^2 \Phi)\|^2 \right| \leq C \left( \|r^2 \Phi\|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\partial B_\varepsilon} \varepsilon^4 |\Phi|^2 \right).$$

Donc

$$\begin{aligned} \left| q(r^2 \Phi) - \|\nabla(r^2 \Phi)\|^2 \right| &\leq C \left( \|r^2 \Phi\|^2 + \varepsilon^3 (\|\nabla \Phi\| \|\Phi\| + \varepsilon^2 \|\Phi\|^2) \right) \\ &\leq C \left( \|\Phi\|^2 + \varepsilon^3 \left( \|\Phi\| (\sqrt{q(\Phi)} + \frac{1}{\varepsilon} \|\Phi\|) \right) \right) \end{aligned}$$

et donc  $\|\nabla(r^2 \Phi)\| \leq C\|\Phi\|_q$ .

Avec  $P_\varepsilon$  on conclut facilement que  $\lambda_k \leq \underline{\lim} \mu_k(\varepsilon)$ . Soit en effet  $\mu = \underline{\lim} \mu_k(\varepsilon) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mu_k(\varepsilon_m)$  (avec  $\lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_m = 0$ ) et  $\Psi_k(\varepsilon_m)$  des formes propres normées correspondantes.  $P_{\varepsilon_m}(\Psi_k(\varepsilon_m))$  est bornée dans  $H^1(\Lambda^r(M))$ , on peut donc supposer (quitte à extraire une sous-suite) qu'elle converge faiblement  $H^1$  et en norme  $L_2$ . Soit  $\Phi$  la limite.  $\|\Phi\| = 1$  et  $\Delta \Phi = \mu \Phi$  faiblement et donc fortement d'après le lemme de Weyl. En menant ce raisonnement de front pour  $\mu_0(\varepsilon) \cdots \mu_k(\varepsilon)$  on trouve  $\Phi_0, \dots, \Phi_k$  orthonormée et formes propres de valeur propre inférieure à  $\mu$ , et donc d'après le  $\min\text{-max}$   $\lambda_k \leq \mu$ .

## 6. En degré $p = n - 1$

Tout d'abord si  $k \geq b_{n-1} + N - 1$  alors  $\mu_k(\varepsilon) \neq 0$ . Soit  $\Psi_k(\varepsilon)$  une forme propre, on peut supposer  $d\Psi_k(\varepsilon) = 0$  ou  $\delta\Psi_k(\varepsilon) = 0$ , car  $\Delta$ ,  $d$  et  $\Delta$ ,  $\delta$  commutent. Si pour une infinité de  $\varepsilon$ ,  $d\Psi_k(\varepsilon) = 0$ , alors  $\mu_k(\varepsilon)$  est valeur propre de  $\frac{1}{\sqrt{\mu_k(\varepsilon)}} \delta\Psi_k(\varepsilon)$  (remarquer que les conditions au bord sont vérifiées). D'après l'étude déjà faite  $\mu_k(\varepsilon)$  converge vers une valeur propre de  $\Delta$  sur le  $(n - 2)$ -formes, non nulle pour une forme propre  $\Phi$ . On vérifie  $d\Phi \neq 0$  et donc  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_k(\varepsilon)$  est aussi valeur propre de  $\Delta$  sur les  $(n - 1)$ -formes.

Si pour une infinité de  $\varepsilon$ ,  $\delta\Psi_k(\varepsilon) = 0$ . On fait la même chose avec  $d\Psi_k(\varepsilon)$  qui vérifie aussi les conditions aux bords parce qu'on est en degré  $n$ . Ici il se peut que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_k(\varepsilon) = 0$ , comme on l'a déjà mentionné.

## 7. Formes harmoniques en degré $(n - 1)$

On sait qu'elles sont au nombre de  $b_{n-1} + N - 1$ . Les  $b_{n-1}$ -formes harmoniques de  $M$  donnent des approximations de  $b_{n-1}$  d'entre elles grâce au procédé de 5.1. Notons



$G(x, y)$  le noyau de Green sur les fonctions. Des candidats pour les  $(N - 1)$  restantes sont ( $2 \leq j \leq N$ ) :

$$\omega_j = *d(G(a_1, \cdot) - G(a_j, \cdot)).$$

$G$  vérifie en dehors de  $x$  :  $\Delta_y G(x, \cdot) = -\frac{1}{\text{vol } M}$  donc  $G(a_1, \cdot) - G(a_j, \cdot)$  est harmonique sur  $M_\varepsilon$  et donc  $\omega_j$  est fermée et cofermée, mais elle ne vérifie pas les conditions aux bords. Il faut donc la couper avec le procédé 5.1 en tous les autres  $a_k$ . Enfin  $G(a, \cdot)$  admet le développement (voir [Au]) :

$$G(a_j, \cdot) = \frac{C_n}{d(a_j, \cdot)^{n-2}} F_j \text{ où } F_j \text{ est de classe } C^\infty \text{ dans les coordonnées polaires.}$$

$$F_j(0) = 1 \quad F = 1 + r f_1^j + \tilde{F}_j \quad f_1^j = 0 \text{ si } n > 3$$

$$f_1^j \text{ est constante si } n = 3.$$

On coupe donc :

$$\omega_j(\varepsilon) = C_n \left( -\frac{(n-2)}{r^{n-1}} - f_1^j \frac{n-3}{r^{n-2}} \right) * dr + \chi_\varepsilon \left( * d \left( \frac{C_n}{d(a_j, \cdot)^{n-2}} \tilde{F}_j \right) \right).$$

et de même vers  $a_1$ .

$$\|\omega_j(\varepsilon)\|^2 = O\left(\frac{1}{\varepsilon^{n-2}}\right)$$

et

$$q\left(\varepsilon^{\frac{n-2}{2}} \omega_j(\varepsilon)\right) = O(\varepsilon^2) \text{ où } O(\varepsilon^2 \log \varepsilon) \text{ si } n = 6.$$

Donc  $\omega_j(\varepsilon)$  donne des approximations des  $(N - 1)$ -formes harmoniques restantes.

## Bibliographie

- [A] ANNÉ C. — *Spectre du Laplacien et écrasement d'anses*, Ann. Sci. École Norm. Sup.4e série, 20 (1987), 271-280.
- [AC] ANNÉ C. & COLBOIS B. — *Opérateur de Hodge-Laplace sur des variétés compactes privées d'un nombre fini de boules*, Preprint.
- [Au] AUBIN T. — *Non linear analysis on manifolds, Monge-Ampère Equations*, Springer Verlag, Berlin, 1980.
- [GM1] GALLOT S. & MEYER D. — *Opérateur de courbure et Laplacien des formes différentielles d'une variété riemannienne*, J. Math. Pures Appl., 54 (1975), 259-284.
- [GM2] GALLOT S. & MEYER D. — *D'un résultat hilbertien à un principe de comparaison des spectres, Applications*, Ann. Sci. École Norm. Sup.4e série, 21 (1988), 561-591.
- [H] HÖRMANDER L. — *The analysis of linear partial differential operators III*, Springer (Berlin), 1985.

C. ANNÉ  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE  
D.M.A.  
CH-1015 LAUSANNE  
(Suisse)