Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

HUBERT PESCE

Espace de Teichmüller

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 8 (1989-1990), p. 9-18
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1989-1990__8__9_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
CHAMBÉRY-GRENOBLE
1989–1990 (9–18)

ESPACE DE TEICHMÜLLER

par *Hubert PESCE*

I. Applications quasi-conformes

1. Interprétation géométrique.

On sait qu'une application holomorphe est caractérisée par le fait que sa différentielle en tout point est une similitude, en particulier sa dérivée en la "direction α" : $\partial_\alpha f(z) = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{f(z+re^{i\alpha})-f(z)}{re^{i\alpha}}$ ne dépend pas de α :

$$\partial_\alpha f(z) = f'(z).$$

On va donc imposer à une application quasi-conforme des conditions moins restrictives. Soit $w : U \to \mathbf{C}$ (U : ouvert de $\mathbf{C}$) un difféomorphisme C^1 préservant l'orientation. Avec les notations de l'analyse complexe :

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

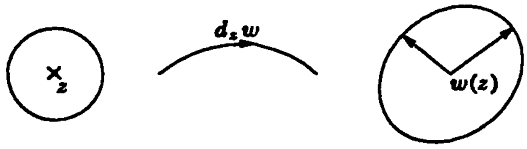
on a :

- $\mathrm{Jac}(w)(z) = |w_z|^2 - |w_{\bar z}|^2 \geqslant 0$ donc : $|w_{\bar z}(z)| \leqslant |w_z(z)|$
- $\partial_\alpha w(z) = w_z(z)e^{i\alpha} + w_{\bar z}(z)e^{-i\alpha}$.

On en déduit :

$$\begin{cases} \max\limits_\alpha |\partial_\alpha w(z)| = |w_z(z)| + |w_{\bar z}(z)| \\ \min\limits_\alpha |\partial_\alpha w(z)| = |w_z(z)| - |w_{\bar z}(z)| \end{cases}$$

On définit $K(z) = \dfrac{\max |\partial_\alpha w(z)|}{\min |\partial_\alpha w(z)|}$: c'est le coefficient de dilatation en z.



$K(z)$ est le rapport du grand axe par le petit axe de l'ellipse image par $d_z w$ d'un cercle. On a toujours $K(z) \geqslant 1$.

DÉFINITION. — *Soit w un difféomorphisme de classe C^1 sur U préservant l'orientation est dit K quasi-conforme si : $\forall z \in U$, $K(z) \leqslant K$.*

Remarque. — w est K quasi-conforme si et seulement si : $\forall z \in U$, $|w_{\bar{z}}(z)| \leqslant k|w_z(z)|$, $k = \frac{K-1}{K+1}$. Il existe donc une fonction $\mu_w : U \to \mathbf{C}$ telle que : $\forall z \in U$, $w_{\bar{z}}(z) = \mu_w(z) w_z(z)$ et $|\mu_w(z)| \leqslant k < 1$. μ_w s'appelle la dilatation complexe de w.

On arrive maintenant à la notion générale de quasi-conformité. Pour cela on a besoin de la définition suivante :

DÉFINITION. — *Soit w une fonction définie sur un domaine U ($U \subset \mathbf{C}$). w est dite absolument continue sur les lignes (A.C.L) si pour tout rectangle $\{x + iy | a \leqslant x \leqslant b\ ; c \leqslant y \leqslant d\}$ inclus dans U, la fonction $x \mapsto w(x+iy)$* (resp. $y \mapsto w(x+iy)$) *est absolument continue sur $[a,b]$* (resp.$[c,d]$) *pour presque tout y dans $[c,d]$ (resp. x dans $[a,b]$).*

Une fonction A.C.L admet des dérivées partielles finies sur U presque partout.

DÉFINITION. — *Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$. $w : U \to U$ un homéomorphisme préservant l'orientation est dit K quasi-conforme si :*

1) w est A.C.L sur U

2) $\max\limits_\alpha |\partial_\alpha w(z)| \leqslant K \min\limits_\alpha |\partial_\alpha w(z)|$ p.p.

2. Propriétés.

Par la suite, tous les homéomorphismes seront supposés préserver l'orientation. On admettra le résultat suivant [1] :

PROPOSITION. — *Soit $w : U \to U$ un homéomorphisme. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) w est K quasi-conforme,

2) $w \in H^1(U)$ et vérifie l'équation $w_{\bar{z}} = \mu w_z$ où $\mu \in L^\infty(U)$ $\|\mu\|_\infty \leqslant k < 1$ avec $k = \frac{K-1}{K+1}$.

Cette équation s'appelle équation de Beltrami.

Dans tout ce qui suit, on s'intéressera au cas où $U = \mathbf{H}^2$ ou $U = \Delta$ ($\mathbf{H}^2 = \{x + iy \mid y > 0\}$ et $\Delta = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$).

On a les règles de calcul suivantes [2] :

1) $\mu_{f\circ g} = \dfrac{\mu_g + (\mu_f \circ g) r_g}{1 + (\mu_f \circ g) r_g \overline{\mu}_g}$ avec $r_g = \dfrac{\overline{g_z}}{g_z}$

2) $f : U \to U$ est conforme $\Leftrightarrow$ $\mu_f \equiv 0$

3) $f : U \to U$ conforme $\Rightarrow$ $\mu_f \circ g = \mu_g$

4) $g : U \to U$ conforme $\Rightarrow$ $\mu_{f\circ g} = \mu_f \circ g \dfrac{\overline{g'}}{g'}$

5) $\mu_f = -\dfrac{\overline{f_z}}{f_z} \mu_{f^{-1}} \circ f$

6) f K_1 quasi-conforme, g K_2 quasi-conforme $\Rightarrow$ $g \circ f$ $K_1 K_2$ quasi-conforme.

D'autre part, on admettra le résultat suivant [1,2].

PROPOSITION. — *Soit $\mu \in L^\infty(U)$, $\|\mu\|_\infty < 1$. Il existe un homéomorphisme $w : U \to U$ tel que $w_{\overline{z}} = \mu w_z$ (*). Si v vérifie (*), alors $w \circ v^{-1}$ est conforme. Si μ est de classe C^k, w l'est aussi.*

On a le résultat important :

THÉORÈME (Mauri, [2]). — *Soit $w : \Delta \to \Delta$ un homéomorphisme K quasi-conforme tel que $w(0) = 0$.*

$$\forall (z_1, z_2) \in \Delta \quad |w(z_1) - w(z_2)| \leqslant 16 |z_1 - z_2|^{1/K}$$
$$|z_1 - z_2| \leqslant 16 |w(z_1) - w(z_2)|^{1/K}.$$

COROLLAIRE. — *Sous les mêmes hypothèses :*

1) w s'étend de manière unique en un homéomorphisme de $\overline{\Delta}$.

2) Une famille d'applications K quasi-conformes fixant 0 est normale.

Notation. — Si $U = \mathbf{H}^2$, $\mu \in L^\infty(\mathbf{H}^2)$, $\|\mu\|_\infty < 1$. On notera w_μ l'unique solution de $w_{\overline{z}} = \mu w_z$ vérifiant : $w(0) = 0$, $w(1) = 1$, $w(\infty) = \infty$.

Citons les deux théorèmes suivants ([1,2]) :

THÉORÈME 1. — *Supposons $\mu_n \to \mu$ p.p $\|\mu_n\|_\infty \leqslant k$ $\forall n \in \mathbf{N}$, alors $w_{\mu_n} \to w_\mu$ uniformément sur tout compact de $\mathbf{H}^2$.*

THÉORÈME 2. — *Supposons $w_{\mu_n} \to w$ uniformément sur tout compact de $\mathbf{H}^2$, alors w est quasi-conforme et $K[w] \leqslant \underline{\lim}_{n\to+\infty} K[w_{\mu_n}]$ (avec $K[w_{\mu_n}] = \dfrac{1 + \|\mu_n\|_\infty}{1 - \|\mu_n\|_\infty}$ et $K[w] = \dfrac{1 + \|\mu\|_\infty}{1 - \|\mu\|_\infty}$ si $w_{\overline{z}} = \mu w_z$).*

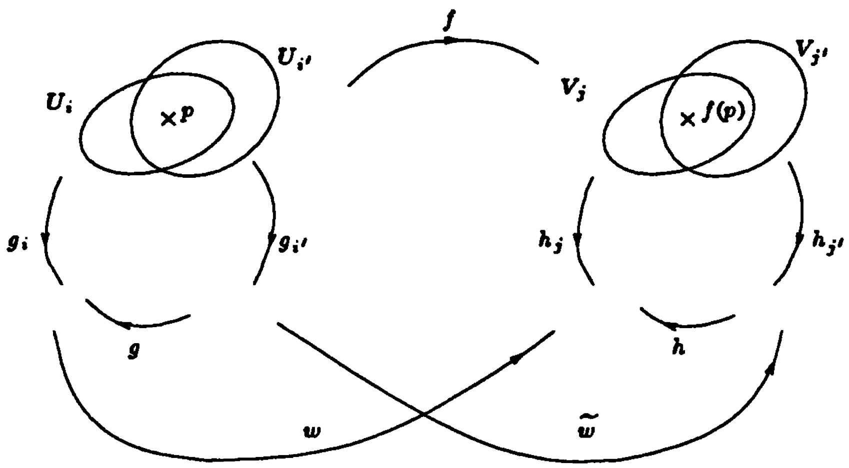
3. Applications quasi-conformes de surfaces de Riemann.

On va transporter la notion de quasi-conformité par les atlas :

DÉFINITION. — *Soient S et S' deux surfaces de Riemann, $(U_i, g_i)_{i\in I}$ et $(V_j, h_j)_{j\in J}$ deux atlas définissant leur structure conforme et f un homéomorphisme de S sur S'. f est dit K quasi-conforme si : $\forall i \in I$, $\forall p \in U_i$, soit $j \in J$ tel que $f(p) \in V_j$, alors $w = h_j \circ f \circ g_i^{-1}$ est K quasi-conforme.*

PROPOSITION. — *Cette définition a un sens.*

Preuve. —



Supposons $p \in U_i \cap U_{i'}$, $f(p) \in U_j \cap U_{j'}$, $g_i = g \circ g_{i'}$, $h_j = h \circ h_{j'}$, $w = h_j \circ f \circ g_i^{-1}$, $\widetilde{w} = h_{j'} \circ f \circ g_{i'}^{-1}$. On a donc $w \circ g = h \circ \widetilde{w}$. Ce qui montre que w est quasi-conforme si et seulement si $\widetilde{w}$ l'est (puisque g et h sont conformes). D'autre part :

$$\mu_{w\circ g} = \mu_w \circ g \times \frac{\overline{g'}}{g'}, \quad \mu_{h\circ\widetilde{w}} = \mu_{\widetilde{w}},$$

donc

$$|\mu_{\widetilde{w}}| = |\mu_w \circ g|.$$

Il en résulte que w est K quasi-conforme si et seulement si $\widetilde{w}$ l'est. ∎

Définissons $\mu_i : U_i \to \mathbf{C}$ par $\mu_i(p) =$ dilatation complexe de $h_j \circ f \circ g_i^{-1}$ au point $g_i(p)$. Ceci a un sens puisque la dilatation complexe est invariante par composition à gauche par une application conforme. D'après la preuve précédente :

$$\forall p \in U_i \cap U_j \quad \mu_i(p)\frac{\overline{g'(g_j(p))}}{g'(g_j(p))} = \mu_j(p) \quad g = g_i \circ g_j^{-1}.$$

DÉFINITION. — *On appelle différentielle de Beltrami sur S la donnée d'une famille d'applications $(\mu_i)_{i\in I}$, $\mu_i : U_i \to \mathbf{C}$ telle que :*

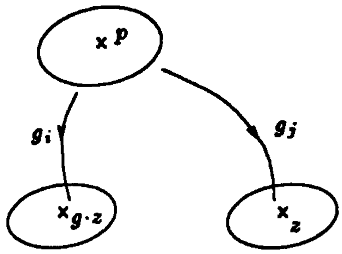
$$\forall (i,j) \text{ tel que } U_i \cap U_j \neq \emptyset,\ \forall p \in U_i \cap U_j \quad \mu_i(p)\frac{\overline{g'(g_j(p))}}{g'(g_j(p))} = \mu_j(p) \text{ avec } g = g_i \circ g_j^{-1}.$$

Donc la dilatation complexe d'une application quasi-conforme sur S est une différentielle de Beltrami sur S. Notons $L^\infty_{(-1,1)}(S)$ les différentielles de Beltrami sur S.

On va maintenant voir la situation au niveau du revêtement universel $\mathbf{H}^2$. On peut supposer $S = \mathbf{H}^2/G$ où G est un groupe Fuchsien. La structure conforme est fournie $(U_i, g_i)_{i\in I}$ où V_i est un ouvert de $\mathbf{H}^2$ tel que $\pi : \mathbf{H}^2 \to \mathbf{H}^2/G$ soit un homéomorphisme $V_i \to U_i$ et $g_i = (\pi|V_i)^{-1}$.

Soit $\mu \in L^\infty_{(-1,1)}(S)$. Posons $\tilde{\mu}(z) = \mu_i(\pi(z))$ si $z \in V_i$.

On en déduit $\tilde{\mu}(g \cdot z) = \tilde{\mu}(z)\dfrac{\overline{g'(z)}}{g'(z)}$, $\forall g \in G$, $\forall z \in \mathbf{H}^2$.



$g \cdot V_j = V_i \qquad U_i = U_j$

Définition. — *Une différentielle de Beltrami sur $\mathbf{H}^2$ est dite compatible avec G si :*

$$\forall z \in \mathbf{H}^2,\ \forall g \in G, \quad \mu(g \cdot z) = \mu(z)\frac{\overline{g'(z)}}{g'(z)}.$$

Notons $L^\infty(\mathbf{H}^2; G)$ l'ensemble des différentielles de Beltrami compatibles avec G, c'est un espace de Banach complexe, et $L^\infty(\mathbf{H}^2; G)_1$ sa boule unité ouverte.

On a le lemme important :

Lemme. — *$\mu \in L^\infty(\mathbf{H}^2, G)_1$ si et seulement si $G_\mu = w_\mu G w_\mu^{-1}$ est Fuchsien.*

Preuve. — $\Rightarrow$: soit $g \in G$, posons $g_\mu = w_\mu g w_\mu^{-1}$, $w_\mu g = g_\mu w_\mu$. En prenant la dilatation complexe des deux membres, on obtient $\mu_{g_\mu} = 0$, donc $g_\mu \in PSL_2(\mathbf{R})$.

$\Leftarrow$: si $g_\mu = w_\mu g w_\mu^{-1} \in PSL_2(\mathbf{R})$, en prenant la dilatation complexe des deux membres, on obtient facilement que $\mu \circ g = \mu\dfrac{\overline{g'}}{g'}$. ∎

Remarquons que w_μ induit une application quasi-conforme $f_\mu : S \to S_\mu$ avec $S_\mu = \mathbf{H}^2/G_\mu$.

Corollaire. — *Pour toute différentielle de Beltrami sur S, il existe une surface de Riemann S' et une application quasi-conforme $f : S \to S'$ qui admet μ comme dilatation complexe. S' et f sont déterminées à application conforme près.*

Preuve. — Soit $\tilde{\mu}$ la relevée de μ. $\tilde{\mu} \in L^\infty(\mathbf{H}^2; G)_1$. Il suffit de prendre $S = S_{\tilde{\mu}}$, $f = f_{\tilde{\mu}}$. Si (f, S') et (g, S'') répondent aux hypothèses, alors la dilatation complexe de $f \circ g^{-1}$ est nulle, d'où le résultat. ∎

II. Espace de Teichmüller

1. Espace de Teichmüller d'une surface de Riemann.

On se limitera aux surfaces de Riemann compacte d'un genre g donné. Soit S_0 une telle surface fixée une fois pour toute.

DÉFINITION. — *On appelle surface de Riemann modelée sur S_0 la donnée d'un couple (f, S) où f est un homéomorphisme quasi-conforme $f : S_0 \to S$. Soit $\widehat{M}(S_0)$ l'ensemble des surfaces de Riemann modelées sur S_0.*

On va définir différentes relations d'équivalence sur $\widehat{M}(S_0)$:

i) $(f_1, S_1) \approx (f_2, S_2) \Leftrightarrow f_2 \circ f_1^{-1}$ est conforme $\qquad M(S_0) = \widehat{M}(S_0)/\approx$

ii) $(f_1, S_1) \sim (f_2, S_2) \Leftrightarrow \exists \sigma$ difféomorphisme holomorphe $S_1 \to S_2$ tel que σ soit homothope à $f_2 \circ f_1^{-1}$ $\qquad T(S_0) = \widehat{M}(S_0)/\sim$

iii) $(f_1, S_1) \underset{R}{\sim} (f_2, S_2) \Leftrightarrow \exists \sigma$ difféomorphisme holomorphe $S_1 \to S_2$.

$$R(S_0) = \widehat{M}(S_0)/\underset{R}{\sim}.$$

On a évidemment les projections suivantes : $\widehat{M}(S_0) \to M(S_0) \to T(S_0) \to R(S_0)$.

DÉFINITION. — *$T(S_0)$ est l'espace de Teichmüller de S_0.*
$R(S_0)$ est l'espace de Riemann de S_0.

Le théorème suivant montre que la condition de quasi-conformité n'est pas restrictive, c'est-à-dire que $T(S_0)$ contient "toutes" les surfaces de Riemann.

THÉORÈME. — *Soient S et S' deux surfaces de Riemann compactes et f un homéomorphisme de S dans S', il existe une application $g : S \to S'$ quasi-conforme homothope à f.*

Preuve. — Comme S est compacte, il existe un recouvrement fini de S par des ouverts $U_1, \ldots, U_n$ tels que U_k soit conformément équivalent à Δ et ∂U_k soit une courbe analytique. Il en est de même pour $f(U_k)$. Soient $\varphi_k : U_k \to \Delta$ et $\psi_k : f(U_k) \to \Delta$ conformes. Posons $f_0 = f$. On définit f_k par récurrence.

- $f_k \equiv f_{k-1}$ sur $S - U_k$
- $w = \psi_k \circ f \circ \varphi_k^{-1}$

$$\begin{tikzcd} U_k \arrow[r, dash, "f"] \arrow[d, dash, "\varphi_k"'] & f(U_k) \arrow[d, dash, "\psi_k"] \\ \Delta \arrow[r, dash, "w"'] & \Delta \end{tikzcd}$$

Soit $\widetilde{w}$ l'extension de Beurling-Ahlfors (*cf.* [1]) avec conditions $\widetilde{w}|_{S_1} = w|_{S^1}$. $\widetilde{w}$ est quasi-conforme. $w_t = tw + (1-t)\widetilde{w}$ est une homothopie de w à $\widetilde{w}$.

On pose $f_{k|_{U_k}} = \psi_k^{-1} \circ \widetilde{w} \circ \varphi_k$.

f_k est quasi-conforme sur $\bigcup_{i=1}^{k} U_i$ et homothope à f_{k-1}. Il suffit de prendre $g = f_n$. ∎

2. Espace de Teichmüller d'un groupe Fuchsien.

On va essayer d'obtenir une notion équivalente en raisonnant sur les groupes Fuchsiens. Si $S = \mathbb{H}^2/G$ est une surface compacte de genre g, alors G a $2g$ générateurs $a_1, \ldots, a_b$, $b_1, \ldots, b_g$ tels que $\prod_{i=1}^{g} [a_i, b_i] = 1$.

Soit $S = \mathbb{H}^2/G$, soient $\mu, \nu \in L^\infty(\mathbb{H}^2; G)_1$, $G_\mu = w_\mu G w_\mu^{-1}$, $G_\nu = w_\nu G w_\nu^{-1}$. Posons $S_\mu = \mathbb{H}^2/G_\mu$, $S_\nu = \mathbb{H}^2/G_\nu$.

PROPOSITION. — *On suppose $S_\mu = S_\nu$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) f_μ est homothope à f_ν

2) $w_{\mu|_{\overline{\mathbb{R}}}} = w_{|_{\overline{\mathbb{R}}}}$

Preuve. —

1) $\Rightarrow$ 2) : soit $F : I \times S \to S_\mu$, $F(0, \cdot) = f_\mu$, $F(1, \cdot) = f_\nu$. Posons $G : I \times S \to S$, $G = f_\mu^{-1} \circ F$, $G(0, \cdot) = 1_S$, $G(1, \cdot) = f_\mu^{-1} \circ f_\nu$. On peut donc supposer $S = S_\mu$ et $f_\mu = 1_S$. Posons $G_t = G(t, \cdot)$. G se relève en une application $\widetilde{G} : I \times \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$, $\widetilde{G}(0, \cdot) = 1_{\mathbb{H}^2}$, posons $\widetilde{G}_t = \widetilde{G}(t, \cdot)$

Affirmation : $\forall g \in G$, $\forall t \in [0,1]$, $\widetilde{G}_t \circ g = g \circ \widetilde{G}_t$. En effet, comme $\widetilde{G}_t$ induit G_t, $\forall t \in [0,1]$, $\widetilde{G}_t \circ g = g_t \circ \widetilde{G}_t$. L'application $t \mapsto g_t$ est continue de $[0,1]$ dans G, donc constante. Comme $g_0 = g$, $\forall t \in [0,1]$, $g_t = g_0$.

Donc : $\forall z \in \mathbb{H}^2$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\widetilde{G}_1 \circ g^n z = g^n \circ \widetilde{G}_1 z$. Soient α_g et ω_g les points fixes répulsifs et attractifs de g, en faisant tendre n vers $+\infty$: $\widetilde{G}_1(\alpha_g) = \alpha_g$, $\widetilde{G}_1(\beta_g) = \beta_g$. Comme S est compacte, l'action de G à l'infini est dense, donc $\widetilde{G}_{1|_{\overline{\mathbb{R}}}} = 1_{\overline{\mathbb{R}}}$. Mais $\widetilde{G}_1$ est un relevé de $f_\mu^{-1} \circ f_\nu$ qui fixe $0, 1, \infty$, donc $\widetilde{G}_1 = w_\mu^{-1} \circ w_\nu$, donc $w_{\mu|_{\overline{\mathbb{R}}}} = w_{\nu|_{\overline{\mathbb{R}}}}$.

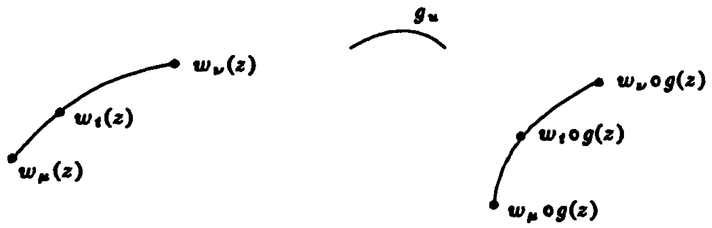
2) $\Rightarrow$ 1) : soit $w_t(z)$ le point de $[w_\mu(z), w_\nu(z)]$ tel que

$$d(w_\mu(z), w_t(z)) = t d(w_\mu(z), w_\nu(z)).$$

w_t est une homothopie de w_μ à w_ν.

Affirmation : $\forall t \in [0,1]$, w_t induit une application f_t de S dans $S_\mu = S_\nu$.

Remarquons que si $g_\mu = w_\mu g w_\mu^{-1}$, $g_\nu = w_\nu g w_\nu^{-1}$, alors $g_\nu = g_\mu$ car $g_\mu, g_\nu \in PSL_2(\mathbb{R})$ et $g_{\mu|_{\overline{\mathbb{R}}}} = g_{\nu|_{\overline{\mathbb{R}}}}$. Comme g_μ est une isométrie : $w_t \circ g = g_\mu \circ w_t$



Il en résulte que w_t induit une homothopie de f_μ à f_ν. ∎

On peut maintenant définir l'espace de Teichmüller d'un groupe Fuchsien. Pour cela, on définit les relations d'équivalence suivantes sur $L^\infty(\mathbf{H}^2; G)_1$:

1) $\mu \sim \nu \iff w_{\mu|_{\overline{\mathbf{R}}}} = w_{\nu|_{\overline{\mathbf{R}}}}$ $\qquad T(G) = L^\infty(\mathbf{H}^2; G)_{1/\sim}$

2) $\mu \underset{R}{\sim} \nu \iff G_\mu$ et G_ν sont conjugués dans $PSL_2(\mathbf{R})$, $R(G) = L^\infty(\mathbf{H}^2; G)_{1/\underset{R}{\sim}}$.

DÉFINITION. — *$T(G)$ s'appelle l'espace de Teichmüller de G.*
$R(G)$ s'appelle l'espace de Riemann de G.

On a évidemment les projections suivantes : $L^\infty(\mathbf{H}^2; G)_1 \to T(G) \to R(G)$ (car si $w_{\mu|_{\overline{\mathbf{R}}}} = w_{\nu|_{\overline{\mathbf{R}}}}$, $G_\mu = G_\nu$).

On a la proposition suivante.

PROPOSITION. — *Si $S = \mathbf{H}^2/G$. On a le diagramme commutatif suivant où les flèches horizontales sont les projections et les flèches verticales sont des bijections :*

$$\begin{array}{ccccccc}
\widehat{M}(S) & \longrightarrow & M(S) & \longrightarrow & T(S) & \longrightarrow & R(S) \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & L^\infty(\mathbf{H}^2; G)_1 & \longrightarrow & T(G) & \longrightarrow & R(G)
\end{array}$$

Preuve. — Montrons, par exemple, que $T(G) \simeq T(S)$.

Soit $\varphi : L^\infty(\mathbf{H}^2; G)_1 \to T(S)$, $\mu \mapsto [(f_\mu, S_\mu)]$.

• φ est surjective : soit $(f, S') \in \widehat{M}(S)$. $f : S \to S'$ quasi-conforme. Soit ν la dilatation complexe de f, μ sa relevée dans $\mathbf{H}^2$. Il est clair que $(f, S') \sim (f_\mu, S_\mu)$, donc $\varphi(\mu) = [(f, S')]$.

• Supposons $\varphi(u) = \varphi(\nu)$, il existe $\sigma : S_\mu \to S_\nu$ conforme et homothope à $f_\nu \circ f_\mu^{-1}$, donc f_ν et $\sigma \circ f_\mu$ sont homothopes. Donc, les relevés de f_ν et $\sigma \circ f_\mu$ fixant $0, 1, \infty$ coïncident sur $\overline{\mathbf{R}}$, comme ce sont w_μ et w_ν, $w_{\mu|_{\overline{\mathbf{R}}}} = w_{\nu|_{\overline{\mathbf{R}}}} \Rightarrow \mu \sim \nu$.

φ induit donc bien une bijection $\overline{\varphi} : T(G) \to T(S)$.

III. Métrique sur l'espace de Teichmüller

On va munir $T(S)$ d'une structure d'espace métrique complet. Pour cela, on va d'abord se placer sur $T(G)$.

Remarque. — On a une structure de groupe sur $L^\infty(\mathbb{H}^2; G)_1$ en posant : $\mu \cdot \nu =$ dilatation complexe de $w_\mu \circ w_\nu$.

On commence par définir une métrique sur $L^\infty(\mathbb{H}^2; G)_1$ en posant :

$$\widehat{\tau}(\mu, \nu) = \frac{1}{2} \log K[w_\mu \circ w_\nu^{-1}]$$

avec $K[w_\mu \cdot w_\nu^{-1}] = \dfrac{1 + \|\mu - \nu^{-1}\|_\infty}{1 - \|\mu - \nu^{-1}\|_\infty}$, $\|\mu - \nu^{-1}\|_\infty = \left\| \dfrac{\mu - \nu}{1 - \mu\overline{\nu}} \right\|_\infty$.

PROPOSITION. — *$\widehat{\tau}$ définit la même topologie que $\|\cdot\|_\infty$.*

Preuve. — 1) $|1 - \mu\overline{\nu}| \leqslant 2 \Rightarrow \left\| \dfrac{\mu - \nu}{1 - \mu\overline{\nu}} \right\|_\infty \geqslant \dfrac{\|\mu - \nu\|_\infty}{2} \Rightarrow \|\mu - \nu\|_\infty \leqslant 2\mathrm{th}\widehat{\tau}(\mu, \nu)$. Donc si

$$\widehat{\tau}(\mu_n, \mu) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ , alors } \|\mu_n - \mu\|_\infty \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2) Supposons $\|\mu_n - \mu\|_\infty \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, $\exists k < 1$ tel que $\|\mu_n\|_\infty \leqslant k$ et $\|\mu\|_\infty \leqslant k$.

$$\frac{|\mu - \mu_n|}{|1 - \mu\overline{\mu}_n|} \leqslant \frac{\|\mu - \mu_n\|_\infty}{1 - k^2} ;$$

donc

$$\mathrm{th}\widehat{\tau}(\mu, \mu_n) \leqslant \frac{\|\mu - \mu_n\|_\infty}{1 - k^2}.$$

Il en résulte que :

$$\|\mu_n - \mu\|_\infty \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \widehat{\tau}(\mu, \mu_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

■

PROPOSITION. — *$(L^\infty(\mathbb{H}^2; G)_1, \widehat{\tau})$ est un espace métrique complet.*

Preuve. — Soit $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy pour $\widehat{\tau}$. Posons $w_n = w_{\mu_n}$. On construit facilement une sous-suite $\{\mu_{p_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall k \geqslant n, \quad \log \left(K[w_{p_n} \circ w_{p_{n+k}}^{-1}] \right) < \frac{1}{2^n},$$

donc

$$\|\mu_{p_n} - \mu_{p_{n+k}}\|_\infty \leqslant 2\mathrm{th}\frac{1}{2^{n+1}}.$$

Comme L^∞ est complet, il existe μ tel que $\|\mu - \mu_{p_n}\|_\infty \to 0$. Comme

$$K[w_{p_{n+k}}] \leqslant K[w_{p_n}] K[w_{p_n}^{-1} \circ w_{p_{n+k}}] \leqslant K[w_{p_n}] e^{1/2^n},$$

les $\{w_{p_n}\}$ sont K quasi-conforme pour un certain K indépendant de n.

Il existe donc $k < 1$, tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|\mu_{p_n}\|_\infty \leqslant k < 1$, donc $\|\mu\| < 1$. Il en résulte que $\mu \in L^\infty(\mathbb{H}^2; G)_1$, comme $\|\mu_{p_n} - \mu\|_\infty \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, $\widehat{\tau}(\mu_{p_n}, \mu) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$,

$\{\mu_n\}$ est donc de Cauchy et admet une sous-suite convergente, donc $\{\mu_n\}$ est une suite convergente : $\widehat{\tau}(\mu_n, \mu) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. ∎

On va maintenant définir une métrique sur $T(G)$ à partir de $\widehat{\tau}$ en posant

$$\tau([\mu],[\nu]) = \inf\left\{\tau(\mu',\nu'),\ \mu' \in [\mu]\ \nu' \in [\nu]\right\}.$$

LEMME. — *Pour tout* $[\mu]$, $[\nu]$ *dans* $T(G)$, *il existe* $\mu_0 \in [\mu]$, $\nu_0 \in [\nu]$ *tels que* $\widehat{\tau}(\mu_0,\nu_0) = \tau([\mu],[\nu])$.

Preuve. — 1) On va définir une sorte d'"invariance" : posons $d = \widehat{\tau}(\mu_0,\nu_0)$. Soit $\mu_1 \in [\mu_0]$. Posons $\nu_1 = \mu_1 \cdot \mu_0^{-1} \cdot \nu_0$, on a $\mu_i^{-1} \cdot \nu_1 = \mu_0^{-1} \cdot \nu_0$ donc :

$$w_{\mu_1}^{-1} w_{\nu_1} = w_{\mu_0}^{-1} w_{\nu_0} \Rightarrow \widehat{\tau}(\mu_0,\nu_0) = \widehat{\tau}(\mu_1,\nu_1).$$

2) $d = \tau([\mu],[\nu]) = \lim\limits_{n\to+\infty} d_n$, $d_n = \widehat{\tau}(\mu_n,\nu_n)$, $\mu_n \in [\mu]$, $\nu_n \in [\nu]$.

D'après 1), on peut supposer $\mu_n = \mu_0$. Or, il existe K tel que les w_{ν_n} soient K quasi-conformes : $K\left[w_{\nu_n}\right] \leqslant K\left[w_{\nu_n} \circ w_{\mu_0}^{-1}\right] K\left[w_{\mu_0}\right] \leqslant e^{2d_n} K\left[w_{\mu_0}\right]$ et la suite $\{d_n\}$ est bornée. Donc, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $w_{\nu_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} w_{\nu_0}$ uniformément sur tout compact, où w_{ν_0} est quasi-conforme. Il en est de même pour : $w_{\nu_n} \circ w_{\mu_0}^{-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} w_{\nu_0} \circ w_{\mu_0}^{-1}$. Donc $K\left[w_{\nu_0} \circ w_{\mu_0}^{-1}\right] \leqslant \underline{\lim}_{n\to+\infty} K\left[w_{\nu_0} \circ w_{\mu_0}^{-1}\right] = d$. Pour conclure, il suffit de prouver que $\nu_0 \in [\nu]$. Or, $\forall g \in G$, $w_{\nu_n} g w_{\nu_n}^{-1} = g_\nu$ est indépendant de n, donc $w_{\nu_0} g w_{\nu_0}^{-1} = g_\nu$, on a donc bien $\nu_0 \in [\nu]$. ∎

Il est maintenant évident que $(T(G), \tau)$ est un espace métrique complet. On peut maintenant transporter ces métriques sur $M(S)$ et $T(S)$, on obtient :

- sur $M(S)$: $\widehat{\tau}((f_1,S_1),(f_2,S_2)) = \frac{1}{2}\log K[f_2 \circ f_1^{-1}]$
- sur $T(S)$: $\tau([f_1,S_1],[f_2,S_2]) = \inf\left\{\frac{1}{2}\log K[f]\right\}$ où l'inf est pris sur toutes les applications quasi-conformes $f : S_1 \to S_2$ homothopes à $f_2 \circ f_1^{-1}$.

D'après ce qui précède $(M(S), \widehat{\tau})$ et $(T(S), \tau)$ sont des espaces métriques complets et il existe dans chaque classe d'homothopie une application quasi-conforme qui minimise le coefficient de dilatation.

Bibliographie

[1] LEHTO. — *Univalent functions and Teichmüller spaces*, New-York, Berlin, Heildelberg, Springer-Verlag, 1987.

[2] NAG. — *The complex analytic theory of Teichmüller spaces*, New-York, Chichester, Brisbane, John Wiley's Sons, 1988.

Hubert PESCE
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)