Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

Françoise Dal'bo

Des groupes magiques ou quand des sous-groupes libres affines opèrent proprement discontinûment sur $\mathbf{R}^3$

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 8 (1989-1990), p. 19-26

<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1989-1990__8__19_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
CHAMBÉRY-GRENOBLE
1989–1990 (19–26)

DES GROUPES MAGIQUES

ou quand des sous-groupes libres affines opèrent proprement discontinûment sur $\mathbf{R}^3$

par *Françoise DAL'BO*

RÉSUMÉ. — En 1911, Bieberbach [B] démontre que les sous-groupes discrets d'isométries euclidiennes possèdent un sous-groupe d'indice fini abélien. Visant à généraliser ce théorème, Milnor conjecture qu'un sous-groupe affine opérant proprement discontinûment librement sur $\mathbf{R}^n$ est, à indice fini près, résoluble. En 1987 Margulis [M] démontre l'existence en dimension 3 de sous-groupes affines vérifiant les hypothèses de la conjecture et pourtant libres! Je donnerai ici une construction explicite de tels groupes en puisant généreusement dans les écrits de Todd Drumm [D-G] et de Margulis [M].

I. INTRODUCTION

Le groupe affine $GL(3,\mathbf{R}) \ltimes \mathbf{R}^3$ sera noté Aff(3). Je représenterai un élément de Aff(3) par un couple (g, v) où g désigne la partie linéaire et v celle de translation. A un sous-groupe $\Gamma \subset$ Aff(3) est associé le groupe $L(\Gamma) \subset GL(3,\mathbf{R})$ constitué des parties linéaires de Γ. Par définition, Γ opère proprement discontinûment sur $\mathbf{R}^3$ si pour tout compact K, l'ensemble $\Gamma(K) = \{\gamma \in \Gamma/\gamma(K) \cap K \neq \emptyset\}$ est fini. On dira que l'action est libre si seule l'identité fixe un point. En dimension 2, la conjecture de Milnor est vraie grâce aux travaux de Fried-Goldman [F-G], mais en dimension 3, [F-G] se heurtent au cas où $L(\Gamma) \subset SO(2,1)$, le groupe préservant la forme de Lorentz définie par $q(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ où x_1, x_2, x_3 sont les coordonnées de x dans la base canonique.

Ce cas est d'ailleurs si résistant qu'en 1987 Margulis démontre que :

Théorème de Margulis. — *Il existe des sous-groupes libres non abéliens à deux générateurs dans* $SO(2,1) \ltimes \mathbf{R}^3$ *opérant proprement discontinûment librement sur* $\mathbf{R}^3$.

II. Les éléments hyperboliques

Dans $\mathbf{R}^3$ muni de la forme de Lorentz $q(x)$, on désigne par $\mathcal{W}$ le cône de lumière $\{q(x) = 0\} \cap \{x_3 > 0\}$ et par $\mathcal{S}$ l'hyperboloïde à une nappe $q(x) = 1$. Soit s un élément de $\mathcal{S}$, on vérifie aisément que son orthogonal relativement à la forme de Lorentz, $s^{\perp_q}$, et passant par O, est un plan coupant $\mathcal{W}$ en deux demi-droites distinctes. L'intersection de ces deux demi-droites avec la sphère euclidienne $\mathbf{S}^2$ se compose de deux points s^+, s^- choisis pour que (s, s^-, s^+) soit une base directe.

II.1. Définition. — *Un élément s de $\mathcal{S}$ est ε-spatial si* $\|s^+ - s^-\|_{\text{eucl.}} \geqslant \varepsilon$.

L'hyperboloïde $\mathcal{S}$ est obtenue par rotation R_θ autour de l'axe (Ox_3) de la courbe paramétrée $(r, O, \pm\sqrt{r^2 - 1})$ avec $r \geqslant 1$. Par conséquent, $s \in \mathcal{S}$ a pour coordonnées $R_\theta(r, O, \pm\sqrt{r^2 - 1})$ et on montre sans peine que $\|s^+ - s^-\|_{\text{eucl.}} = \frac{\sqrt{2}}{r}$. Par conséquent, plus s est haut sur $\mathcal{S}$ (*i.e.* plus r est grand) et plus $\|s^+ - s^-\|_{\text{eucl.}}$ est petit. On peut donc dire que $\|s^+ - s^-\|_{\text{eucl.}}$ représente la distance de s au cône de lumière. L'ensemble composé de tous les points ε-spatiaux, pour ε fixé, est un compact noté $\mathcal{S}^\varepsilon$.

Un élément g hyperbolique de $SO(2,1)$ a, par définition, 3 valeurs propres réelles distinctes 1, λ, λ^{-1} avec $\lambda < 1$. On montre sans difficulté que les vecteurs propres associés à λ et λ^{-1} sont isotropes (*i.e.* $q(x) = 0$) et que celui relatif à 1 se situe à l'extérieur du cône de lumière. Ces remarques permettent d'associer à g trois vecteurs définis par :

II.2. Définition. — *Soit g un élément hyperbolique, on note $x^\pm(g) \in \mathcal{W} \cap \mathbf{S}^2$, les vecteurs propres de g relativement à $\lambda^{\mp 1}$ $(\lambda < 1)$ et $x^o(g) \in \mathbf{S}^2$, le vecteur fixé par g tel que*

$$\big(x^o(g), x^-(g), x^+(g)\big)$$

soit une base directe.

Remarquons que $x^\pm(g^{-1}) = x^\mp(g)$ et que $x^o(g^{-1}) = -x^o(g)$. On constate de plus que $x^o(g)^{\perp_q} \cap \mathcal{W} \cap \mathbf{S}^2 = \{x^-(g), x^+(g)\}$. Si $x^o(g)$ est noté s, d'après les notations introduites au début du §II, on obtient : $x^\pm(g) = s^\pm$.

II.3. Définition. — *Un élément hyperbolique g est ε-hyperbolique si $x^o(g)$ est ε-spatial.*

On dira qu'une transformation affine de $SO(2,1) \ltimes \mathbf{R}^3$ est ε-hyperbolique si sa partie linéaire l'est.

II.4. PROPRIÉTÉ. — *Une transformation affine hyperbolique $h = (g, v)$ laisse globalement invariante une droite $C(h)$, dirigée par $x^o(g)$. L'action de h sur $C(h)$ est une translation.*

Démonstration. — Dans la base $\big(x^o(g), x^-(g), x^+(g)\big)$, le vecteur v est représenté par (a, b, c). On vérifie aisément que la droite $C(h)$ d'équation $\begin{cases} x_2 = \frac{b}{1-\lambda} \\ x_3 = \frac{c}{1-\lambda^{-1}} \end{cases}$ où $\lambda < 1$ désigne la valeur propre de g, est globalement invariante, c'est l'axe du "vissage hyperbolique". On montre sans difficulté que l'action de h sur $C(h)$ est une translation de vecteur $ax^o(g)$. ■

Remarque. — Les vecteurs $x^{\pm}(g)$ étant orthogonaux à $x^o(g)$, la quantité $ax^o(g)$ s'écrit encore $q\big(v, x^o(g)\big) \times x^o(g)$. Cette remarque a priori anodine nous amène au paragraphe essentiel sur

III. L'INVARIANT DE MARGULIS

L'idée est d'attacher à une transformation hyperbolique, un invariant permettant en quelque sorte de contrôler la distance entre un point et son image. Je rappelle qu'un sous-groupe Γ agit proprement discontinûment sur $\mathbf{R}^3$ si pour tout compact K, l'ensemble $\Gamma(K) = \{\gamma \in \varphi / \gamma K \cap K \neq \emptyset\}$ est fini. Autrement dit, l'ensemble des éléments de Γ envoyant un point à distance bornée doit être fini, d'où l'idée d'un tel invariant.

III.1. PROPOSITION. — *Soit $h = (g, v)$ une transformation affine hyperbolique, la quantité $q\big(h(x) - x, x^o(g)\big)$ est indépendante de x . On la notera $\alpha(h)$ et on la baptisera invariant de Margulis.*

La démonstration est immédiate et repose sur la remarque;

$$q\big(g(x), x^o(g)\big) = q\big(x, x^o(g)\big) \ .$$

En choisissant $x = 0$, on obtient $\alpha(h) = q(v, x^o(g))$ avec $h = (g, v)$. D'après la propriété II.4, on en déduit que, d'un point de vue géométrique, $\alpha(h)$ représente le déplacement d'un point de $C(h)$ par l'action de h .

III.2. LEMME. — *Soit s un élément ε-spatial* $|q(s, x)| \leqslant \frac{2}{\varepsilon}\|x\|_{\text{eucl.}}$, $\forall x \in \mathbf{R}^3$.

Démonstration. — D'après II.1, un élément de S s'écrit $\mathrm{R}_\theta(r, O, \pm\sqrt{r^2 - 1})$ où R_θ est la rotation d'axe (Ox_3). La symétrie par rapport à $x_3 = 0$ et R_θ étant dans $\mathrm{SO}(2, 1)$, on peut se restreindre au cas où $s = (r, O, \pm\sqrt{r^2 - 1})$. De plus, s étant ε-spatial on en déduit que $r \leqslant \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}$. Soit $x = (x_1, x_2, x_3)$, on a $|q(s, x)| = |x_1 r + x_3\sqrt{r^2 - 1}|$ ce qui s'écrit encore $|q(s, x)| = |\rho(s, x)|$ où ρ représente le produit scalaire euclidien. Ainsi $|q(s, x)| \leqslant \|s\|_{\text{eucl.}}.\|x\|_{\text{eucl.}}$ or $\|s\|_{\text{eucl.}} \leqslant \frac{2}{\varepsilon}$ car s est ε-spatial, d'où $|q(s, x)| \leqslant \frac{2}{\varepsilon}\|x\|_{\text{eucl.}}$. ■

III.3. Proposition — *Soit $h=(g,v)$ une transformation affine ε-hyperbolique:*

$$|\alpha(h)|\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \|h(x)-x\|_{\text{eucl.}}\ ,\ \forall x \in \mathbf{R}^3\ .$$

Ce résultat n'est qu'une conséquence du lemme précédent appliqué à $s = x^o(g)$ et $h(x) - x$.

IV. Construction de groupes libres opérant proprement discontinûment

Un groupe opérant proprement discontinûment et sans torsion (*i.e.* $\gamma^n = \text{Id} \Longleftrightarrow \gamma = \text{Id}$) opère librement. D'après le lemme de Selberg [A], un groupe de type fini inclus dans $\text{GL}(n, \mathbf{R})$ possède un sous-groupe d'indice fini sans torsion. Dans la suite on ne se préoccupera donc que du caractère proprement discontinu de l'action. Un mot en h_1, h_2 noté $m = \prod_{i=1}^{\ell} h_{n_i}^{\delta_i}$ avec $\delta_i = \pm 1$ et $n_i = 1,2$ est réduit si $n_i = n_{i+1}$ implique $\delta_i = \delta_{i+1}$. Un groupe engendré par h_1 et h_2 est libre si aucun mot réduit non trivial n'est l'identité. La construction de l'exemple repose sur le critère suivant dû à Drumm [D-G].

IV.1. Critère de Drumm. — *Soient $h_1, h_2 \in \text{SO}(2,1) \ltimes \mathbf{R}^3$ engendrant un groupe libre $\Gamma = \langle h_1, h_2\rangle$ et tels qu'il existe $\varepsilon > 0$, $g_0 \in \text{SO}(2,1)$, $c > 0$ vérifiant* (1) *et* (2) *:*

(1) $\quad g_0\ m(h_1, h_2)$ *est ε-hyperbolique, pour tout mot $m(h_1, h_2)$*

(2) $\quad \big|\alpha\big(g_0\ m(h_1, h_2)\big)\big| \geqslant c\ell(m)$ *où $\ell(m)$ représente la longueur de m*

alors Γ opère proprement discontinûment sur $\mathbf{R}^3$.

Démonstration. — Soit K un compact de $\mathbf{R}^3$, montrons que $\Gamma(K) = \{m \in \Gamma,\ mK \cap K \neq \emptyset\}$ est fini, c'est-à-dire , $\ell(m)$ est majorée uniformément sur $\Gamma(K)$. En utilisant l'hypothèse (2), on obtient que $\ell(m) \leqslant \frac{1}{c}|\alpha(g_0\ m)|$. D'après la proposition III.3, $|\alpha(g_0\ m)| \leqslant \frac{2}{\varepsilon}\|g_0\ m(x) - x\|_{\text{eucl.}}$ pour tout x. En choisissant $m \in \Gamma(K)$ et $x \in m^{-1}(K) \cap K$, on obtient $\ell(m) \leqslant \frac{2}{c\varepsilon}$ diam$(K \cup g_0 K)$ qui est une majoration indépendante de m d'après (1). ■

La construction de l'exemple consiste tout d'abord à choisir 3 parties linéaires g_0, g_1, g_2 vérifiant la condition (1) puis à ajouter à g_1, g_2 des parties de translation v_1, v_2 assurant la condition (2).

Choix des parties linéaires.

Dans $\mathbf{R}^3$, la forme de Lorentz q , restreinte aux plans tangents de l'hyperboloïde à 2 nappes (*i.e.* $q(x) = 1$) lui confère une structure de variété riemannienne à courbure -1. La projection stéréographique de la nappe supérieure $\mathcal{H}$, sur le plan $x_3 = 0$ par rapport au sommet de la nappe inférieure permet de visualiser $\mathcal{H}$ comme le disque $\mathcal{D}$

de Poincaré, muni de la métrique transportée. Le bord de $\mathcal{D}$, appelé bord à l'infini, correspond à la projection du cône de lumière. Le groupe $SO^o(2,1)$ s'identifie alors aux isométries de $\mathcal{D}$ et un élément hyperbolique de $SO^o(2,1)$ devient une transformation fixant 2 points à l'infini. Soient 3 éléments g_0, g_1, g_2 appartenant à $SO^o(2,1)$ et vérifiant dans le modèle de Poincaré :

$$g_i(A_i^+) = \mathbf{S}^1 \setminus A_i^-$$

où les $A_i^\pm$ sont des intervalles tous disjoints inclus dans le bord à l'infini $\mathbf{S}^1$. Remarquons que $g_i^{-1}(A_i^+) \subset A_i^+$ ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, g_i^{-1} possède un point fixe. Un raisonnement analogue appliqué à $g_i(A_i^-)$ permet d'obtenir un deuxième point fixe dans A_i^-. Les g_i sont donc des éléments hyperboliques et $x^\pm(g_i) \in A_i^\pm$, suivant les notations du paragraphe II.

IV.2. Lemme. — *Soit un mot réduit* $m = \prod_{i=1}^{\ell} g_{n_i}^{\delta_i}$ *avec* $\delta_i = \pm 1$ *et* $n_i = 0, 1, 2.$

$$m\left(\mathbf{S}^1 \setminus A_{n_\ell}^{\delta_\ell}\right) \subset \overline{A_{n_1}^{-\delta_1}} \ .$$

Ce lemme est l'analogue du lemme du Ping-Pong de Tits [T] et se démontre par récurrence sur la longueur des mots. Les conséquences sont tout d'abord que le groupe $\langle g_0, g_1, g_2\rangle$ est libre. En effet, soit un mot réduit non trivial $m = \prod_{i=1}^{\ell} g_{n_i}^{\delta_i}$, d'après le lemme précédent, si $x \in \left(\mathbf{S}^1 \setminus A_{n_\ell}^{\delta_\ell}\right) \setminus A_{n_1}^{-\delta_1}$ alors $m(x) \neq x$.

La deuxième

IV.3. Conséquence. — $g_0\ m(g_1, g_2)$ *est ε-hyperbolique pour ε choisi supérieur à* $\inf d(A_i^\pm, A_j^\mp)$ *avec* $i, j \in \{0, 1, 2\}$.

La démonstration n'est qu'une application du Lemme IV.2.

Remarque. — Si m est un mot en g_1, g_2 vérifiant $g_{n_1}^{\delta_1} \neq g_{n_\ell}^{-\delta_\ell}$, il est aisé, en s'aidant du lemme IV.2, de montrer que m est hyperbolique avec $x^+(m) \in A_{n_\ell}^{\delta_\ell}$ et $x^-(m) \in A_{n_1}^{-\delta_1}$. Vu le choix de ε, m est donc ε-hyperbolique. Le problème est en revanche plus délicat si $g_{n_1}^{\delta_1} = g_{n_\ell}^{-\delta_\ell}$, c'est-à-dire si m est conjugué à un autre mot m'. Certes m sera hyperbolique mais on n'aura aucune information sur $x^\pm(m)$ qui pourront être arbitrairement proches, m ne sera alors plus ε-hyperbolique. Cette remarque, je l'espère, vous éclaire sur l'idée de faire intervenir $g_0 \neq \mathrm{Id}$.

Choix des parties de translation.

Reste maintenant à trouver deux parties de translation v_1, v_2 associées à g_1, g_2 telles que si $h_1 = (g_1, v_1)$ et $h_2 = (g_2, v_2)$, on ait $|\alpha(g_0\ m(h_1, h_2))| \geqslant c\ell(m)$ où c est une constante indépendante du mot m . Le groupe $\langle h_1, h_2\rangle$ sera libre puisque $\langle g_1, g_2\rangle$ l'est. Le chemin conduisant à v_1, v_2 sera sinueux. Je décomposerai un mot $m = \prod_{i=1}^{\ell} h_{n_i}^{\delta_i}$

où $n_i \in \{1,2\}$ et $\delta_i = \pm 1$ en $m = m_j^G h_{n_j}^{\delta_j} m_j^D$ où $m_j^G = \prod_{i=1}^{j-1} h_{n_i}^{\delta_i}$ et $m_j^D = \prod_{i=j+1}^{\ell} h_{n_i}^{\delta_i}$.
Je noterai $m(g_1, g_2)$ la partie linéaire de $m(h_1, h_2)$.

IV.4. LEMME. — *Soient deux transformations affines* $h_1 = (g_1, v_1)$, $h_2 = (g_2, v_2)$. *Si* $m(h_1, h_2) = \prod_{i=1}^{\ell} h_{n_i}^{\delta_i}$ *et si* $f_i(m)$ *représente la transformation affine* $\left(g_{n_i}\left(m_i^D(g_1, g_2) m_i^G(g_1, g_2)\right)^{\delta_i}, v_{n_i}\right)$ *alors* $\alpha(m) = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha(f_i(m))$.

La démonstration est relativement technique, je n'en donnerai ici que la trame. Après s'être rappelé que $\alpha(m) = q(m(0), x^o(m(g_1, g_2))$, la première étape consiste à démontrer par récurrence que $m(0) = \sum_{j=1}^{\ell} m_j^G(g_1, g_2) h_{n_j}^{\delta_j}(0)$. Ceci permet de transformer $\alpha(m)$ en $\sum_{j=1}^{\ell} q\left(m_i^G(g_1, g_2) h_{n_j}^{\delta_j}(0), x^o\left(m(g_1, g_2)\right)\right)$.

La démonstration du lemme IV.4 s'achève alors en utilisant les

Remarques.

(a) $h_i^{\epsilon}(0) = g_i^{\frac{\delta-1}{2}}(\delta v_i)$ où $\delta = \pm 1$.

(b) Soient $g \in SO^o(2,1)$, h une transformation affine hyperbolique et $v \in \mathbf{R}^3$, $\delta = \pm 1$ alors $q\big(g(\delta v), x^o(h)\big) = q\big(v, x^o(g^{-1} h^{\delta} g)\big)$.

Le lemme IV.4 se généralise aisément à plus de 2 générateurs. Ceci permet d'énoncer la

IV.5. PROPOSITION. — *Soient* $h_1 = (g_1, v_1)$, $h_2 = (g_2, v_2)$ *deux transformations affines*

$$\alpha\big(g_0\ m(h_1, h_2)\big) = \sum_{j=1}^{\ell} \alpha\big(f_j(g_0\ m)\big)$$

avec $f_j(g_0\ m) = \big(g_{n_j}(m_j^D g_0\ m_j^G)^{\delta_j}, v_{n_j}\big)$.

Le problème se réduit donc (?!) à trouver une constante c et deux vecteurs v_1, v_2 tels que :

$$(*) \qquad |\alpha\big(f_j(g_0\ m(h_1, h_2))\big)| \geqslant c\ .$$

En effet, d'après la proposition IV.5, on aura $|\alpha(g_0\ m)| \geqslant c\ell(\omega)$ et la condition (2) du critère de Drumm sera satisfaite. Si toutefois le lecteur n'est pas trop épuisé, je l'invite à chercher concrètement des parties de translations v_1, v_2 vérifiant (*). Soient A et B deux intervalles fermés disjoints de $\mathbf{S}^1$, vu comme bord à l'infini dans le modèle de Poincaré. On considère $U(A,B) = \{s \in \mathcal{S} / s^- \in A, s^+ \in B\}$ selon les notations du §II. L'ensemble $U(A,B)$ est un compact connexe de $\mathcal{S}$. On a les

PROPRIÉTÉ 1. — *Soit l'ensemble* $U^\perp$ *défini par* $U^\perp = \bigcup_{u \in U(A,B)} u^{\perp_q}$, *cet ensemble est différent de* $\mathbf{R}^3$.

Pour cela, il suffit de choisir un élément dans $\mathbf{S}^1 \setminus (A \cup B)$ de norme euclidienne égale à 1.

PROPRIÉTÉ 2. — *Soit* $U(A, B)$, *il existe* v *et* $c > 0$ *tels que :*

$$q(u, v) \geqslant c \quad , \quad \forall u \in U(A, B) \ .$$

Démonstration. — Prenons $v \in \mathbf{R}^3 \setminus U^\perp$ et considérons

$$\begin{aligned} U(A,B) &\xrightarrow{f_v} \mathbf{R} \\ u &\longmapsto q(u, v) \ . \end{aligned}$$

L'image de $U(A, B)$ par f_v est un intervalle fermé $[a, b]$ de $\mathbf{R}$ ne rencontrant pas 0. Si $b > 0$ on choisira $c = a$ et si $b < 0$ on remplacera v par $-v$ et c par $-b$. ∎

L'exemple de Margulis.

Rappelons que g_0, g_1, g_2 sont trois éléments de $\mathrm{SO}(2,1)^o$ vérifiant $g_i(A_i^+) = \mathbf{S}^1 \setminus A_i^-$ où les $A_i^\pm$ sont des intervalles tous disjoints inclus dans $\mathbf{S}^1$. Considérons pour chaque $i = 1, 2$ un intervalle fermé B_i contenant tous les $A_j^\pm$ sauf A_i^-. D'après la propriété 2 ci-dessus, il existe pour chaque $c_i > 0$ tels que :

$$(**) \qquad q(u, v_i) \geqslant c_i \ , \ \forall u \in U(A_i^-, B_i) \ .$$

THÉORÈME. — *Le groupe engendré par* $h_1 = (g_1, v_1)$, $h_2 = (g_2, v_2)$, *où* (g_i, v_i) *sont définis ci-dessus, est un groupe libre opérant proprement discontinûment.*

Démonstration. — Les parties linéaires satisfaisant la condition (1) du critère de Drumm avec $\varepsilon = \inf d(A_j^\pm, A_i^\pm)$, il suffit de montrer que $|\alpha(g_0\ m(h_1, h_2))| \geqslant c\ell(m)$ où c est une constante à déterminer. Choisissons $C = \min(c_1, c_2)$, les c_i intervenant dans $(**)$. Soit un mot $m = \prod_{i=1}^{\ell} h_{n_i}^{\delta_i}$ et $f_j(m) = \big(g_{n_j}(m_j^D g_0\ m_j^G)^{\delta_j}, v_{n_j}\big)$ avec $n_i = 1, 2$ et $\delta_i = \pm 1$. En appliquant la conséquence IV.3, on en déduit que $x^-(f_j(m)) \in A_{n_j}^-$ et $x^+(f_j(m)) \in B_{n_j}$. Ainsi $f_j \in U(A_{n_j}^-, B_{n_j})$ et par la formule $(*)$, on a $\alpha(f_j(m)) \geqslant C_{n_j}$ donc $\alpha(f_j(m)) \geqslant C$. Ceci nous permet d'après la proposition IV.5 de montrer que $|\alpha(g_0\ m)| \geqslant c\ell(m)$ qui est la condition (2) du critère de Drumm. ∎

FINALEMENT

Cette construction a un zest de magie qu'il paraît difficile d'éviter. Toutefois si le lecteur est désireux de démystifier encore un peu plus cet exemple, je lui conseille vivement de se reporter à la belle thèse de Todd Drumm (Université de Maryland 1990) dans laquelle il construit le domaine fondamental décrit par les groupes de Margulis et montre que les variétés obtenues sont l'intérieur d'une surface de genre 2. Un problème intéressant consiste à se donner un sous-groupe SO(2, 1), cette fois de volume fini et à essayer de le relever dans Aff(3) afin qu'il opère proprement discontinûment sur $\mathbf{R}^3$. Je serais tentée de penser que ce problème n'a pas de solution...

RÉFÉRENCES

[A] HALPERIN R.C. — *An elementary account of Selberg's lemma*, L'enseignement Math., 33 (1987), 269–273.

[B] BUSER P. — *A geometric proof of Bieberbach's theorems on crystallographic groups*, L'enseignement Math., 31 (1985), 137–145.

[D-G] DRUMM T., GOLDMAN W. — *Complete flat 3-manifolds with free fundamental group*, à paraître.

[F-G] FRIED D., GOLDMAN W. — *Three dimensional affine crystallographic groups*, Adv. in math., 47 (1983), 1–49.

[M] MARGULIS G. — *Complete affine locally flat manifolds with a free fundamental group*, J. sov. Math., 36 (1987), 129–139.

[T] TITS J. — *Free subgroups of linear groups*, Matematika 16, 2 (1972), 47–66.

Françoise DAL'BO
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)