

SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

ALAIN DUFRESNOY

Moyenne de formes quadratiques positives et champs magnétiques

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 3 (1984-1985), exp. n° 5, p. 1-9

http://www.numdam.org/item?id=TSG_1984-1985__3__A5_0

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Chambéry-Grenoble), 1984-1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

1984-1985

MOYENNE DE FORMES QUADRATIQUES POSITIVES ET CHAMPS MAGNETIQUES

par Alain DUFRESNOY

§ 1. INTRODUCTION.

Dans \mathbb{R}^2 , l'opérateur de Schrödinger associé à un champ magnétique $B(x,y)dx \wedge dy$ peut se mettre sous la forme (très disymétrique)

$$H(a) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial}{\partial y} - ia(x,y) \right)^2 \quad \text{où} \quad \frac{\partial a}{\partial x} = B.$$

Cet opérateur est associé naturellement à la forme quadratique (non partout définie) sur $L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$

$$q_{\mathbb{R}^2}(f) = \iint_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial y} - ia f \right|^2 dx dy$$

soit encore, si on désigne par ϕ une fonction telle que $\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) = a(x,y)$,

$$q_{\mathbb{R}^2}(f) = \iint_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial}{\partial y} (f e^{-i\phi}) \right|^2 dx dy.$$

Dans la suite, nous supposons que ϕ est continûment différentiable sur $[0,1] \times [0,1]$ (ceci est possible dès que B est continu) et considérons

$$q(f) = \iint_{[0,1] \times [0,1]} \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial}{\partial y} (f e^{-i\phi}) \right|^2 dx dy.$$

Si on définit, pour chaque $x \in [0,1]$, Q_x sur $L^2 y$ par

$$Q_x(g) = \int_{[0,1]} \left| \frac{\partial}{\partial y} (g(y) e^{-i\phi(x,y)}) \right|^2 dy,$$

et en désignant par f_x l'application $y \mapsto f(x,y)$, on a :

$$q(f) = \int_0^1 \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\|^2 + Q_x(f_x) dx .$$

Les formes quadratiques Q_x ont même domaine de définition, $H^1([0,1])$, et de plus ces formes quadratiques sont égales à une transformation unitaire près de $L^2[0,1]$, qui n'est autre que la multiplication par $e^{-i\phi}$.

Le but de ce qui suit est d'étudier le bas du spectre de (l'opérateur auto-adjoint associé à) la forme quadratique q ; en fait, nous n'obtiendrons d'informations que sur les deux premières valeurs propres.

La motivation était d'obtenir des informations sur le comportement asymptotique des valeurs propres de $H(a)$ dans le cas où $B(x,y) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow \infty} \infty$. {A l'heure actuelle, cette préoccupation est sans objet, Colin de Verdière ayant résolu le problème}.

Pour cela, on suivait l'article de C. Feffermann [2], le seul intérêt (s'il en a un) étant de donner une démonstration très simple d'un succédané du lemme fondamental de [2] dans le cas particulier du champ magnétique. Inutile de préciser que la plupart des idées sont extraites de [2].

Dans la suite, on utilisera sans références des résultats classiques qu'on peut trouver dans [3].

§ 2. MOYENNE DE FORMES QUADRATIQUES.

Ceci amène à dégager la situation suivante : dans ce paragraphe, H désigne un espace de Hilbert et pour $x \in [0,1]$, U_x une famille continue de transformations unitaires de H conservant le domaine d'une forme quadratique Q fermée positive. On désigne par q

la forme quadratique (non partout définie) sur $L^2([0,1], H)$ par

$$q(f) = \int_0^1 \left\| \frac{df}{dx} \right\|^2 + Q_x(f_x) dx \quad \text{où } Q(U_x g) = Q_x(g) .$$

Pour une forme quadratique q semi bornée, on notera

$$\lambda_1(q) = \inf_{\substack{g \in \mathcal{D}(q) \\ \|g\|=1}} q(g) .$$

Remarque. - Il n'est pas difficile de voir que même si

$\lambda_1(Q) = 0$, on peut avoir $\lambda_1(q) > 0$; pour s'en convaincre, on peut par exemple considérer $H = \mathbb{R}^2$, Q une forme quadratique dont les valeurs propres sont 0 et 1 et $U_x = \begin{pmatrix} \cos \theta x & -\sin \theta x \\ \sin \theta x & \cos \theta x \end{pmatrix}$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

On vérifie aisément que l'application de $\mathcal{D}(Q)$ dans \mathbb{R} définie par $\bar{Q}(\varphi) = \int_0^1 Q_x(\varphi) dx$ est une forme quadratique sur $\mathcal{D}(Q)$, que nous appellerons moyenne de la famille Q_x sur $[0,1]$.

Il est immédiat, grâce au principe du minimax, que $\lambda_1(q) \leq \lambda_1(\bar{Q})$: il suffit de tester la forme quadratique q sur les applications de $L^2([0,1], H)$ constantes.

On se propose de voir que, dans une certaine mesure, l'inégalité opposée est vraie. Mais avant d'énoncer le résultat précis, il nous faut encore introduire une notation: si Q est une forme quadratique fermée, on peut lui associer une représentation spectrale

$H \simeq \oplus L^2(d\mu_n)$ telle que $Q(f, g) = \sum_n \int x f_n \bar{g}_n d\mu_n$ et si $a \in \mathbb{R}$, on désigne par $Q^a(f, g) = \sum_n \int_{\mathbb{R}} \text{Inf}(x, a) f_n \bar{g}_n d\mu_n$.

On a

PROPOSITION 1. - Soit H un espace de Hilbert et pour $x \in [0,1]$ une famille U_x continue de transformations unitaires de H conservant le domaine d'une forme quadratique

Q fermée positive, et $q(f) = \int_0^1 \left\| \frac{df}{dx} \right\|^2 + Q(U_x(f_x)) dx$; il existe $k > 0$ telle que :

$$k \lambda_1(\overline{Q^{\pi^2}}) \leq \lambda_1(q) \leq \lambda_1(\overline{Q}) .$$

Pour cela, on démontre tout d'abord :

LEMME 1. - Soit $f \in \mathcal{D}(q)$ et désignons par $\bar{f} \in H$ la moyenne de f sur $[0, 1]$. Alors $q(f) \geq \frac{1}{2} \overline{Q^{\pi^2}}(\bar{f})$.

Démonstration. - On a tout d'abord

$$q(f) = \int_0^1 \left\| \frac{df}{dx} \right\|^2 + Q_x(f(x)) dx \geq \int_0^1 \pi^2 \|f(x) - \bar{f}\|^2 + Q_x(f(x)) dx .$$

Notons $g \mapsto \hat{g}$ la représentation spectrale associée à la forme quadratique Q .

$$q(f) \geq \int_0^1 \left(\pi^2 \left\| \widehat{U_x(f(x) - \bar{f})} \right\|^2 + \int \xi \left| \widehat{U_x f(x)} \right|^2 d\mu \right) dx$$

ou encore

$$q(f) \geq \int_0^1 \left(\int \text{Inf}(\xi, \pi^2) \left[\left| \widehat{U_x(f)} - \widehat{U_x \bar{f}} \right|^2 + \left| \widehat{U_x f(x)} \right|^2 \right] d\mu \right) dx$$

d'où

$$q(f) \geq \int_0^1 \left(\int \text{Inf}(\xi, \pi^2) \times \frac{1}{2} \left| \widehat{U_x \bar{f}} \right|^2 d\mu \right) dx .$$

Mais le terme de droite est exactement $\frac{1}{2} \overline{Q^{\pi^2}}(\bar{f})$.

Démonstration de la proposition 1. - Soit $0 \leq \lambda < 1$ fixé, et soit $f \in \mathcal{D}(q)$; alors, soit $q(f) \leq \lambda \|f\|^2$, soit $q(f) > \lambda \|f\|^2$ dans le premier cas, on a a fortiori

$$\int_0^1 \left| \frac{df}{dx} \right|^2 dx \leq \lambda \|f\|^2 .$$

Un calcul facile montre qu'alors $\|\bar{f}\| \geq (1 - \sqrt{\lambda}) \|f\|$, et grâce au lemme 1, on a :

$$q(f) \geq \frac{1}{2} \times \lambda_1(\overline{Q^{\pi^2}}) \times (1 - \sqrt{\lambda})^2 \|f\|^2 .$$

Pour chaque λ , on a donc démontré :

$$\lambda_1(q) \geq \text{Inf} \left(\lambda, \frac{1}{2}(1-\sqrt{\lambda})^2 \lambda_1(\overline{Q^{\pi^2}}) \right) .$$

Si on utilise alors que $\lambda_1(\overline{Q^{\pi^2}}) \leq \pi^2$, on montre aisément que la valeur de λ pour laquelle cette borne inférieure est maximum, est inférieure ou égale à λ_0 .

Ceci entraîne, en posant $k = \frac{1}{2}(1-\sqrt{\lambda_0})^2$ l'inégalité annoncée.

On se propose maintenant d'obtenir une information sur la deuxième valeur propre de (l'opérateur auto-adjoint associé à) la forme quadratique q .

PROPOSITION 2. - Si la forme Q^{π^2} admet comme seule valeur propre différente de π^2 la valeur propre 0 (avec multiplicité 1), alors il existe μ (ne dépendant pas de la forme Q) tel que le nombre des valeurs propres de la forme quadratique q inférieures à μ est au plus égal à 1.

Démonstration. - Soit V un sous-espace vectoriel de dimension 2 de H ; alors Q^{π^2}/V est une forme quadratique positive qui a une valeur propre supérieure ou égale à π^2 , donc $\text{Tr}(Q^{\pi^2}/V) \geq \pi^2$. On en déduit que $\text{Tr}(\overline{Q^{\pi^2}}/V) \geq \pi^2$; donc, d'après le principe du minimax, si λ_1 et λ_2 désignent les deux premières valeurs propres de $\overline{Q^{\pi^2}}$, on a $\lambda_1 + \lambda_2 \geq \pi^2$.

Considérons maintenant W un espace de dimension 2 de $L^2([0,1], H)$ tel que dans W , on ait $q(f) \leq \nu \|f\|^2$ où $\nu < 1$.

L'application $f \in W \rightarrow \bar{f} \in H$ qui, à une fonction de $L^2([0,1], H)$, associe sa moyenne est linéaire et injective ($\|\bar{f}\| \geq (1-\sqrt{\nu})\|f\|$).

Désignons par V l'image de W : c'est un espace vectoriel de dimension 2 de H . Grâce au lemme 1, on sait que :

$$q(f) \geq \frac{1}{2} \overline{Q^{\pi^2}}(\bar{f})$$

V. 6

donc sur l'espace vectoriel V , on a :

$$\frac{1}{2} \overline{Q^{\pi^2}}(\bar{f}) \leq \nu \|f\|^2 \leq \frac{\nu}{(1-\sqrt{\nu})^2} \|\bar{f}\| .$$

D'après le principe du minimax, on en déduit que $\lambda_2 \leq \frac{\nu}{(1-\sqrt{\nu})^2}$ et donc $\frac{\nu}{(1-\sqrt{\nu})^2} \geq \frac{\pi^2}{2}$; cette condition fournit la condition sur ν ; on a $\nu \geq \mu$, où $\frac{\mu}{(1-\sqrt{\mu})^2} = \frac{\pi^2}{2}$.

Remarques. - Les résultats énoncés précédemment l'ont été sans aucun souci de généralité. On peut remplacer $\int_0^1 \left| \frac{df}{dx} \right|^2 + Q_x(f(x))$ par une forme quadratique $\int_X |\nabla f|^2 + Q_x(f(x))$ où X est une variété riemannienne, π^2 étant remplacé alors par la première valeur propre non nulle du Laplacien avec condition de Neumann.

D'autre part, la condition sur la famille de formes quadratiques peut être beaucoup assouplie : il n'est pas vraiment nécessaire que toutes les formes quadratiques se correspondent par une transformation unitaire.

En particulier, si on considère la forme quadratique

$$q(f) = \iint_{[0,1] \times [0,1]} |\nabla f|^2 + V(g)f dydy$$

où le potentiel V est positif, la proposition 1, convenablement adaptée, montre que

$$q(f) \geq \left(\overline{V^{\pi^2}} \right) \|f\|^2$$

où $\overline{V^{\pi^2}}$ est la moyenne sur $[0,1] \times [0,1]$ de $\text{Inf}(V, \pi^2)$.

§ 3. RETOUR AUX CHAMPS MAGNETIQUES.

Afin de minorer $\lambda_1(q)$ pour la forme quadratique

$$q(f) = \int_0^1 \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial}{\partial y} \left(e^{-i\Phi(x,y)} f \right) \right|^2 dx dy ,$$

nous avons vu dans le paragraphe précédent qu'il suffisait d'obtenir une minoration de la forme quadratique $\overline{Q^{\pi^2}}$ où $Q(f) = \int_0^1 \left| \frac{\partial g}{\partial y} \right|^2 dy$.

On remarque tout d'abord que $\overline{Q^{\pi^2}}(f) = \pi^2 \|g - \bar{g}^y\|^2$ où \bar{g}^y désigne la moyenne de la fonction $g \in L_y^2$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

On a donc :

$$\overline{Q_x^{\pi^2}}(g) = \pi^2 \|g e^{-i\Phi(x,y)} - \overline{(e^{-i\Phi(x,y)} g)}\|^2$$

et donc

$$\overline{Q_x^{\pi^2}}(g) = \pi^2 \int_0^1 \|g(y) - e^{i\Phi(x,y)} \overline{(e^{-i\Phi(x,y)} g(y))}^y\|^2 dx .$$

En appliquant Fubini, puis l'inégalité de Schwarz, on obtient :

$$\overline{Q_x^{\pi^2}}(g) \geq \pi^2 \int_0^1 \left| f(y) - \int_0^1 e^{i\Phi(x,y)} \overline{(e^{-i\Phi(x,y)} f(y))}^y dx \right|^2 dy .$$

En exprimant alors la moyenne en y à l'aide d'une intégrale, on obtient

$$\overline{Q_x^{\pi^2}}(g) \geq \pi^2 \|g - h\|^2 \quad \text{où} \quad h(y) = \int_0^1 g(z) \left(\int_0^1 e^{i\{\Phi(x,y) - \Phi(x,z)\}} dx \right) dz .$$

On a évidemment :

$$\|h\|^2 \leq \|g\|^2 \times \int_0^1 \int_0^1 \left| \int_0^1 e^{i\Phi(x,y) - \Phi(x,z)} dx \right|^2 dy dz .$$

Ceci nous permet d'énoncer :

PROPOSITION 3. - Soit B un champ magnétique sur $[0, 1] \times [0, 1]$ et Φ une fonction qui lui est associée ; alors si q désigne la forme quadratique

$$q(f) = \int_{[0, 1] \times [0, 1]} \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial}{\partial y} (f e^{-i\Phi}) \right|^2 ,$$

on a :

V. 8

$$\lambda_1(q) \geq \pi^2 \left[1 - \int_0^1 \int_0^1 \left| \int_0^1 e^{i\{\Phi(x,y) - \Phi(x,z)\}} dx \right|^2 dy dz \right] .$$

Remarques. -

1) En utilisant la définition de la fonction Φ , on a :

$$\frac{\partial}{\partial x} \{\Phi(x,y) - \Phi(x,z)\} = \int_z^y B(x,t) dt ,$$

ce qui montre que le choix de Φ dans l'expression précédente n'a aucune influence sur le résultat.

2) Dans le cas où B est un champ magnétique constant, on obtient :

$$\lambda_1(q) \geq \pi^2 \left[1 - \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{2}{B(y-z)} \left| \sin \frac{B(y-z)}{2} \right| \right)^2 dy dz \right] .$$

Cette inégalité étant très médiocre pour les grandes valeurs de B , on remédie à cette situation en découpant le carré $[0,1] \times [0,1]$ en carrés de côté ℓ et en remarquant que la forme quadratique sur ce carré de côté ℓ pour le champ magnétique $q_\ell(B(x,y))$ s'identifie à $\frac{1}{\ell^2} \times q_1(\ell^2 B(\frac{x}{\ell}, \frac{y}{\ell}))$ où q_1 désigne la forme quadratique associée à un champ magnétique sur un carré de côté 1.

3) Il n'est pas difficile d'obtenir quelques minoration de $\lambda_1(q)$ dans le cas où le rapport entre $\text{Inf } B(x,y)$ et $\text{Sup } B(x,y)$ est borné, ou dans le cas où la dérivée par rapport à x de B est bornée par rapport à B . Ceci permet par exemple d'obtenir l'ordre de grandeur du comportement asymptotique du nombre de valeurs propres inférieures à λ de $H(a)$, mais ce résultat est sans intérêt depuis [1].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Y. COLIN DE VERDIERE, L'asymptotique de Weyl pour des bouteilles magnétiques bidimensionnelles.
Preprint de l'Institut Fourier (1985).

- [2] C. FEFFERMANN, The uncertainty principle.
Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. 9,
2 septembre 1983.

- [3] REED - SIMON, Methods of Modern Mathematical Physics I, II, IV.
