SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

MARC ARCOSTANZO

Des métriques finslériennes sur le disque à partir d'une fonction distance entre les points du bord

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 10 (1991-1992), p. 25-33
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1991-1992__10__25_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
CHAMBÉRY-GRENOBLE
1991–1992 (25–33)

DES MÉTRIQUES FINSLÉRIENNES SUR LE DISQUE À PARTIR D'UNE FONCTION DISTANCE ENTRE LES POINTS DU BORD

par *Marc ARCOSTANZO*

Sur le disque unité D de $\mathbf{R}^2$, la donnée d'une métrique riemannienne g (ou d'une métrique finslérienne, ou plus généralement encore d'une structure d'espace de longueur ; voir les définitions au début du **1**)) détermine sur le bord ∂D de D une distance d_g : la distance $d_g(x,y)$ entre deux points x et y de ∂D est la borne inférieure des longueurs (pour g) des chemins de D joignant x à y. Pour tout difféomorphisme Φ de D qui vaut l'identité sur le bord ∂D, g et $\Phi_* g$ ont même fonction distance sur le bord : $d_g = d_{\Phi_* g}$. On peut donc définir une application $B : g \mapsto d_g$, définie sur un ensemble de structures de longueur à isométrie près et à valeur dans l'ensemble des distances sur ∂D.

Plusieurs auteurs ont considéré le problème de l'injectivité de B, restreinte à l'espace des métriques riemanniennes ; l'article [Cr2] contient un récapitulatif des divers résultats connus. Citons simplement le résultat positif suivant :

THÉORÈME (voir [Ot] et [Cr1]). — *Soit g_0 et g_1 deux métriques riemanniennes sur D avec $d_{g_0} = d_{g_1}$. Si g_0 est à courbure négative ou nulle, alors (D, g_0) et (D, g_1) sont isométriques.*

Par contre, on sait peu de choses sur l'image de B. On établit ici des conditions suffisantes sur une distance d sur ∂D pour qu'il existe une distance δ sur D telle que (D,δ) soit un espace de longueur avec $B(\delta) = d$; on peut de plus imposer à l'avance les géodésiques de (D,δ) (théorème 1). Sous certaines conditions, δ est en fait la distance associée à une métrique finslérienne sur D (théorème 2). On peut alors montrer (théorème 3) que l'application B restreinte aux métriques finslériennes n'est pas injective.

1) Un théorème de prolongement.

Dans toute la suite, une métrique finslérienne sur D est la donnée d'une application continue $N : TD \longrightarrow \mathbf{R}_+$ dont la restriction à chaque espace tangent est une norme. Étant donné δ une distance sur D, (D, δ) est un espace de longueur si la distance $\delta(x, y)$ entre deux points x et y de D est égale à la borne inférieure des longueurs des chemins de D qui relient x à y. Une métrique riemannienne est donc un cas particulier de métrique finslérienne ; et (D, δ) est bien un espace de longueur si δ est la distance associée à une métrique riemannienne ou finslérienne.

Commençons par exposer quelques propriétés satisfaites par une distance d_g sur ∂D, si g est une métrique finslérienne sur D.

DÉFINITION. — *Soit d une distance sur ∂D. Si x, y, z et t sont quatre points apparaissant dans cet ordre sur ∂D, on pose $\Delta d(x,y,z,t) = d(x,z) + d(y,t) - d(y,z) - d(x,t)$. On dit que d vérifie la condition $(\geqslant)$ si $\Delta d(x,y,z,t) \geqslant 0$ pour tous les quadruplets possibles de points ; si de plus $\Delta d(x,y,z,t) > 0$ lorsque les quatre points sont deux à deux distincts, on dit que d vérifie la condition $(>)$.*

LEMME. — *Soit g une métrique finslérienne sur D ; alors :*

(a) d_g est continue pour la topologie euclidienne sur ∂D.

(b) d_g vérifie $(\geqslant)$.

Preuve. — La propriété *(a)* est évidente. Pour le *(b)*, notons i un point d'intersection d'une géodésique minimisante joignant x à z et d'une géodésique minimisante joignant y à t. Alors $\Delta d(x,y,z,t) = (d(x,i) + d(i,z)) + (d(y,i) + d(i,t)) - d(y,z) - d(x,t)$ est une quantité positive ou nulle, à cause des deux inégalités triangulaires $d(y,z) \leqslant d(y,i) + d(i,z)$ et $d(x,t) \leqslant d(x,i) + d(i,t)$.

APPLICATION. — La distance d_0 sur ∂D définie par $d_0(x,y) = f(\theta)$ (voir les figures 1a et 1b) ne vérifie pas $(\geqslant)$, puisque $\Delta d_0(x,y,z,t) = 1 + 1 - 2 - 2 < 0$ pour le choix (x,y,z,t) indiqué figure 1c. Il n'existe donc pas de métrique finslérienne g sur D vérifiant $d_0 = d_g$.

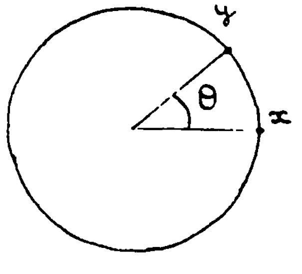

fig. 1a

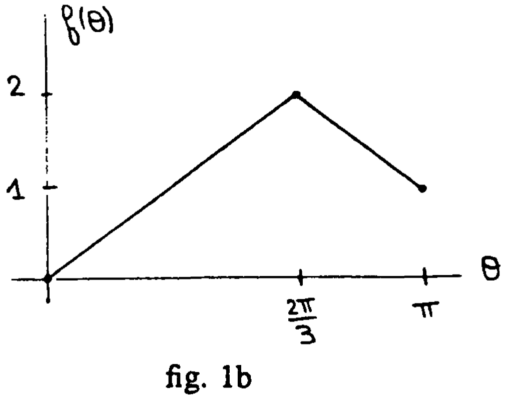

fig. 1b

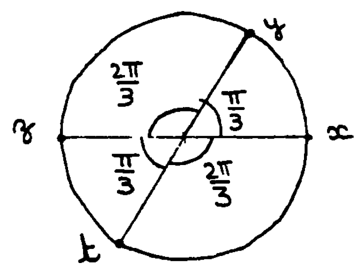

fig. 1c

Donnons-nous une distance d sur ∂D. On cherche à prolonger cette distance à D de telle manière que le résultat soit un espace de longueur. L'idée consiste à imposer a priori les géodésiques du prolongement. Plus précisément :

DÉFINITION. — *On note Δ la diagonale de $\partial D \times \partial D$ et $\mathcal{G} = (\partial D \times \partial D \setminus \Delta)/\sim$ où $\sim$ est la relation d'antipodie : $(x, y) \sim (y, x)$. Un système de courbes admissibles Γ est la donnée, pour tout $(x, y) \in \mathcal{G}$, d'un chemin $\gamma_{x,y}$ qui vérifie les conditions suivantes :*

(i) pour tout $(x, y) \in \mathcal{G}$, $\gamma_{x,y}$ est un arc de classe C^1 dans D qui rejoint x à y et n'intersecte ∂D qu'en ces deux points.

(ii) tout vecteur non nul de l'intérieur de D est tangent à une unique courbe $\gamma_{x,y}$ élément de Γ ; par deux points distincts quelconques de D, il passe une unique courbe $\gamma_{x,y}$ élément de Γ.

Exemple. — Si g est une métrique riemannienne sur D à courbure négative ou nulle et pour laquelle D est convexe, on peut prendre pour $\gamma_{x,y}$ la g-géodésique de x à y. En particulier, le segment euclidien de x à y convient.

Fixons un système de courbes admissibles Γ. On veut exhiber une distance δ sur D dont la restriction à ∂D est d, et qui est une Γ-distance c'est-à-dire

a) δ est continue par rapport à la topologie euclidienne sur D.

b) si p, q et r sont trois points pris dans cet ordre sur l'une des courbes admissibles $\gamma_{x,y}$ de Γ, alors $\delta(p, r) = \delta(p, q) + \delta(q, r)$.

Lorsqu'une telle distance existe, (D, δ) est un espace de longueur dont les éléments de Γ sont des géodésiques minimisantes. On peut maintenant énoncer un théorème d'existence :

THÉORÈME 1. — *Si $d : \partial D \times \partial D \to \mathbf{R}_+$ est une distance sur ∂D qui vérifie la condition (>) et qui est C^1 sur $\partial D \times \partial D \setminus \Delta$, si Γ est un système de courbes admissibles, alors il existe sur D une unique Γ-distance δ avec $B(\delta) = d$.*

2) La preuve du théorème.

Commençons par une propriété fondamentale des Γ-distances : une description en termes de mesure. On munit Γ de la topologie naturelle obtenue par identification de Γ avec $\mathcal{G}$. Si p et q sont deux points distincts de D, on note $[p, q]$ (resp. [p]) l'ensemble des éléments de $\mathcal{G}$ qui coupent entre p et q l'unique courbe de Γ contenant p et q (resp. qui contiennent p).

DÉFINITION. — *$\mathcal{M}$ est l'ensemble des mesures μ sur Γ qui vérifient*

(i) μ est une mesure borélienne positive finie sur les compacts.

(ii) pour tout $p \in D$, $\mu([p]) = 0$.

(iii) pour tout $p, q \in D$ avec $p \neq q$, $\mu([p,q]) > 0$.

Le résultat qui suit donne un procédé simple pour obtenir une Γ-distance à partir d'un élément de $\mathcal{M}$.

LEMME. — *Soit $\mu \in \mathcal{M}$; alors $\delta : D \times D \to \mathbf{R}_+$ définie par*

$$\forall p \in D,\ \forall q \in D,\quad \delta(p,q) = \frac{1}{2}\mu([p,q]) \tag{1}$$

est une Γ-distance.

Preuve. — Les propriétés de $\mu \in \mathcal{M}$ et de Γ assurent que δ est bien une distance, additive le long des $\gamma_{x,y}$. Pour la continuité de δ, on raisonne ainsi : soit $p \in D$, et (p_n) une suite de D qui converge vers p (pour la topologie euclidienne). Posons $\mathcal{A}_n = \bigcup_{p \geqslant n} [p, p_n]$, on a $\bigcap_{n \geqslant 0} \mathcal{A}_n = [p]$. Or $\mu[p] = 0$ donc $\lim \delta(p, p_n) = 0$ puisque $\delta(p, p_n) = \frac{1}{2}\mu[p, p_n] \leqslant \frac{1}{2}\mu(\mathcal{A}_n)$.

Toutes les Γ-distances sont en fait obtenues par ce procédé, en vertu du

THÉORÈME (*cf.* [Al] ou [Am]). — *Pour toute Γ-distance δ, il existe une unique mesure $\mu \in \mathcal{M}$ telle que* (1) *soit vrai.*

On établit facilement par un calcul combinatoire utilisant (1) que si x, y, z et t sont quatre points apparaissant dans cet ordre sur ∂D, $\Delta\delta(x, y, , z, t) = \mu([x, y] \cap [z, t])$; donc les quantités de la forme $\mu([x, y] \cap [z, t])$ ne dépendent que de la restriction de δ à ∂D. Considérons une suite $(p_n)_{n \geqslant 0}$ de points deux à deux distincts de ∂D, dense dans ∂D. La suite double $(\gamma_{p_n, p_{n'}})_{n,n' \geqslant 0}$ est alors dense dans Γ ; donc les parties de la forme $[x, y] \cap [z, t]$ engendrent la tribu borélienne de Γ. Par suite, une mesure μ sur Γ est déterminée de manière unique par les valeurs qu'elle prend sur les ensembles de la forme $[x, y] \cap [z, t]$. En particulier, μ ne dépend que de la restriction de δ à ∂D, ce qui démontre l'assertion du théorème 1 portant sur l'unicité du prolongement.

D'autre part, la relation $\mu([x, y] \cap [z, t]) = \Delta d(x, y, z, t)$ définit une application μ sur les pavés de la forme $[x, y] \cap [z, t]$, dont il est facile de vérifier l'additivité, et donc le fait qu'elle se prolonge, par un théorème classique (voir par exemple [Me], théorème 8, page 51), en une mesure borélienne (que l'on notera aussi μ) sur Γ. Pour achever la preuve du théorème 1, il suffit alors de démontrer le résultat qui suit

PROPOSITION. — *La mesure μ est élément de $\mathcal{M}$, et la Γ-distance qu'elle induit via la formule* (1) *vérifie $B(\delta) = d$.*

Preuve. — Si p est un point de l'intérieur de D et x un point de ∂D, on convient de noter $\sigma(p, x)$ l'unique point de ∂D pour lequel $p \in \gamma_{x, \sigma(x,p)}$. On vérifie aisément que $\sigma(p, \cdot)$ est une application continue.

Soit p, q deux points distincts de D et $\gamma_{x,y}$ la courbe admissible qui les contient. Si $z \in \partial D \setminus \{x, y\}$, la continuité de $\sigma(q, \cdot)$ assure qu'il existe un point z' de ∂D tel que z, z', $\sigma(p, z')$ et $\sigma(q, z)$ soient quatre points deux à deux distincts apparaissant dans cet ordre sur ∂D (voir figure 2). Comme $[z,z'] \cap [\sigma(p,z'),\sigma(q,z)] \subset [p,q]$, $\mu([p,q]) \geqslant \Delta d(z,z',\sigma(p,z'),\sigma(q,z)) > 0$ puisque d vérifie la condition (>). Cela prouve la propriété *(iii)* de $\mathcal{M}$

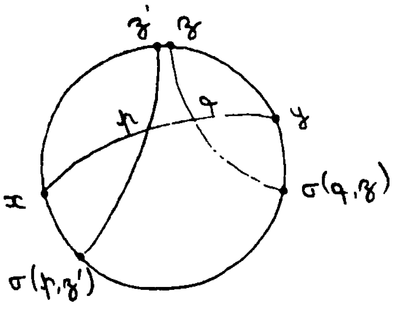

fig. 2

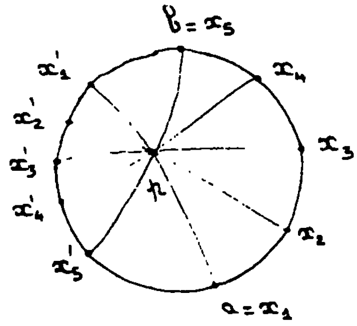

fig. 3

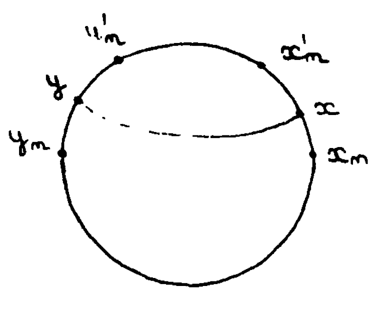

fig. 4

Preuve du point (ii). — Soit p un point de l'intérieur de D et $I = (a,b)$ un intervalle de ∂D, choisi de telle sorte que les quatre points $a, b, a' = \sigma(p,a)$, et $b' = \sigma(p,b)$ soient deux à deux distincts et apparaissent dans cet ordre sur ∂D. Il suffit de montrer que $\mu(\mathcal{A}) = 0$, avec $\mathcal{A} = \{\gamma \in \Gamma / p \in \gamma \text{ et } \gamma \in [a,b]\}$. On définit pour cela une suite d'ensemble $(\mathcal{A}_n)_{n\geqslant 0}$ de la manière suivante : pour $n = 0$, $\mathcal{A}_0$ désigne $[a,b] \cap [a',b']$. Pour tout $n \geqslant 1$, on partage $(a,b) \subset \partial D$ en 2^n sous-intervalles de même longueur euclidienne (x_1,x_2), $(x_2,x_3), \ldots, (x_{2^n}, x_{2^n+1})$ avec $a = x_1$ et $b = x_{2^n+1}$ (voir la figure 3 pour le cas $n = 2$) ; on note $x_i' = \sigma(p,x_i)$ pour tout i et on définit $\mathcal{A}_n = \bigcup_{1\leqslant i \leqslant 2^n} [x_i,x_{i+1}] \cap [x_i', x_{i+1}']$. Il est aisé de vérifier que $(\mathcal{A}_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite décroissante et que $\mathcal{A} = \bigcap_{n\geqslant 0} \mathcal{A}_n$. Il suffit donc de s'assurer que $\mu(\mathcal{A}_n) \to 0$ pour pouvoir conclure que $\mu(\mathcal{A}) = 0$.

On calcule

$$\mu(\mathcal{A}_n) = \sum_{1\leqslant i\leqslant 2^n} \mu\big([x_i,x_{i+1}] \cap [x_i',x_{i+1}']\big)$$

$$= \sum_{1\leqslant i\leqslant 2^n} \big(d(x_i,x_i') - d(x_{i+1},x_i')\big) + \big(d(x_{i+1},x_{i+1}') - d(x_i,x_{i+1}')\big)$$

et on applique le théorème des accroissements finis avec deux fonctions $d(\cdot,x_i')$ et $d(\cdot,x_{i+1}')$: si ℓ est la longueur euclidienne de $(a,b) \subset \partial D$, il existe pour tout i des points u_i et v_i de l'intervalle $(x_i,x_{i+1}) \subset \partial D$ avec

$$\mu(\mathcal{A}_n) = \sum_{1\leqslant i\leqslant 2^n} -\frac{\ell}{2^n}\frac{\partial d}{\partial x}(u_i,x_i') + \frac{\ell}{2^n}\frac{\partial d}{\partial x}(v_i,x_{i+1}')$$

et donc

$$\mu(\mathcal{A}_n) \leqslant \ell \max_{1\leqslant i\leqslant 2^n} \left|\frac{\partial d}{\partial x}(u_i,x_i') - \frac{\partial d}{\partial x}(v_i,x_{i+1}')\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

puisque la fonction $\frac{\partial d}{\partial x}$ est uniformément continue sur $(a,b) \times (a',b')$.

Pour terminer, vérifions que la Γ-distance δ déterminée par μ en utilisant (1) satisfait à $B(\delta) = d$. Soit x et y deux points distincts de ∂D. Choisissons quatre suites

(x_n), (x'_n), (y_n), (y'_n) de points de ∂D, situés par rapport à x et à y comme l'indique la figure 4, et vérifiant $\lim x_n = \lim x'_n = x$ et $\lim y'_n = \lim y_n = y$. Les propriétés de Γ impliquent $\mu([x,y]) = \lim \mu([x_n, y_n] \cap [x'_n, y'_n]) = 2d(x,y)$ puisque

$$\mu([x_n, y_n] \cap [x'_n, y'_n]) = d(x_n, y'_n) + d(x'_n, y_n) - d(x_n, x'_n) - d(y_n, y'_n)$$

et que d est continue sur $\partial D \times \partial D$. Donc $\delta(x,y) = \frac{1}{2}\mu([x,y]) = d(x,y)$, ce qui termine la preuve du théorème 1.

3) Des métriques finslériennes.

Il existe une expression plus explicite de δ en fonction de d et de Γ. Soit p et q deux points distincts de l'intérieur de D. Il leur correspond un unique couple $(x,y) \in \partial D \times \partial D$, avec $p \in \gamma_{x,y}$, $q \in \gamma_{x,y}$ et p situé entre q et x sur $\gamma_{x,y}$. On note $\partial D(x,y)$ l'ensemble des points de ∂D situés entre x et y comme sur la figure 5a.

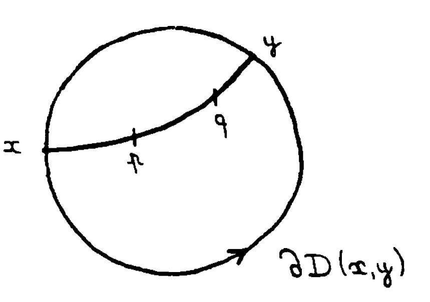

fig. 5a

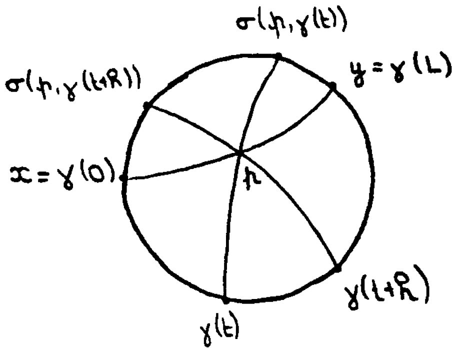

fig. 5b

PROPOSITION. — *Pour la distance δ définie par le théorème 1,*

$$\delta(p,q) = \frac{1}{2}\int_{\partial D(x,y)} \frac{\partial d}{\partial x}(t, \sigma(p,t)) - \frac{\partial d}{\partial x}(t, \sigma(q,t))dt \ .$$

Preuve. — On estime tout d'abord $\delta(x,p)$. Soit $\gamma : [0,L] \to \partial D$ une paramétrisation de $\partial D(x,y)$ avec $\gamma(0) = x$, $\gamma(L) = y$ et $\gamma'(t)$ de norme euclidienne 1. Pour tout $t \in [0,L]$, on note $f(t)$ la mesure des géodésiques qui coupent $\gamma_{x,y}$ entre x et p et qui ont une extrémité sur $\partial D(x,y)$, entre x et $\gamma(t)$; autrement dit $f(t) = \mu([x,p] \cap [x,\gamma(t)])$. Soit $h > 0$ avec $0 \leqslant t < t+h \leqslant L$. Les propriétés des courbes admissibles assurent que

$$[\gamma(t),\gamma(t+h)]\cap[x,\sigma(p,\gamma(t+h))] \subset [\gamma(t),\gamma(t+h)]\cap[x,p] \subset [\gamma(t),\gamma(t+h)]\cap[x,\sigma(p,\gamma(t))]$$

d'où, en calculant les mesures de ces trois ensembles, les deux inégalités

$$d(x,\gamma(t+h)) - d(x,\gamma(t)) + d(\gamma(t),\sigma(p,\gamma(t+h))) - d(\gamma(t+h),\sigma(p,\gamma(t+h))) \leqslant f(t+h) - f(t)$$

et

$$f(t+h) - f(t) \leqslant d(\gamma(t),\sigma(p,\gamma(t))) - d(\gamma(t+h),\sigma(p,\gamma(t))) + d(\gamma(t+h),x) - d(\gamma(t),x) \ .$$

Il en résulte que $f'(t) = \frac{\partial d}{\partial x}(\gamma(t),x) - \frac{\partial d}{\partial x}(\gamma(t),\sigma(p,\gamma(t)))$. Comme $f(0) = 0$ et $\delta(x,p) = \frac{1}{2}\mu([x,p]) = \frac{1}{2}f(L)$, il vient $\delta(x,p) = \frac{1}{2}d(x,y) - \frac{1}{2}\int_0^L \frac{\partial d}{\partial x}(\gamma(t),\delta(p,\gamma(t)))dt$.

Le résultat de la proposition provient d'une formule analogue pour $\delta(x,q)$ et du fait que $\delta(p,q) = \delta(x,q) - \delta(x,p)$.

En renforçant les hypothèses sur le système de courbes et la fonction distance sur le bord, le théorème 1 fournit en fait une métrique finslérienne sur D :

THÉORÈME 2. — *Supposons que d est une distance sur ∂D, C^2 sur $\partial D \times \partial D \setminus \Delta$, avec $\frac{\partial^2 d}{\partial x \partial y} > 0$; supposons que Γ est un système de courbes admissibles pour lequel $\sigma : \partial D \times \partial D \to \partial D$ est une application C^1 sur* int$(D) \times \partial D$. *Alors la distance δ donnée par le théorème est la distance associée à une métrique finslérienne sur l'intérieur de D, définie par*

$$N(\xi) = \frac{1}{4}\int_{\partial D} \frac{\partial^2 d}{\partial x \partial y}(s, \sigma(p,s))\left|D_1\sigma(p,s)\cdot\xi\right| ds \text{ si } \xi \in T_pD\ .$$

Preuve. — Soit p un point de l'intérieur de D et $\xi \in T_pD$ un vecteur de norme 1. À ξ est associé un unique couple $(x,y) \in \mathcal{G}$ avec ξ tangent à $\gamma_{x,y}$. On se donne $\gamma :]-\varepsilon,\varepsilon[\to D$ une paramétrisation de $\gamma_{x,y}$ au voisinage de p, avec $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = \xi$ et $\gamma'(t)$ de norme 1 pour tout t. La proposition précédente donne

$$\delta(p,\gamma(t)) = \frac{1}{2}\int_{|(x,y)} \frac{\partial d}{\partial x}(s,\sigma(p,s)) - \frac{\partial d}{\partial x}(s,\sigma(\gamma(t),s))ds \text{ pour } t \geqslant 0\ .$$

Les hypothèses faites sur Γ assurent que $t \mapsto \delta(p,\gamma(t))$ est dérivable à droite en $t = 0$, de dérivée

$$\begin{aligned} N(\xi) &= -\frac{1}{2}\int_{\partial D(x,y)} \frac{\partial^2 d}{\partial x \partial y}(s,\sigma(p,s))D_1\sigma(p,s)\cdot\xi\ ds \\ &= \frac{1}{2}\int_{\partial D(x,y)} \frac{\partial^2 d}{\partial x \partial y}(s,\sigma(p,s))|D_1\sigma(p,s)\cdot\xi|ds \text{ car } D_1\sigma(p,s)\cdot\xi \leqslant 0\ . \end{aligned}$$

D'autre part, on établit comme dans la proposition précédente que

$$\delta(p,\gamma(t)) = \frac{1}{2}\int_{\partial D(y,x)} \frac{\partial d}{\partial x}(s,\sigma(\gamma(t),s)) - \frac{\partial d}{\partial x}(s;\sigma(p,s))\ ds \text{ pour } t \geqslant 0$$

d'où

$$\begin{aligned} N(\xi) &= \frac{1}{2}\int_{\partial D(y,x)} \frac{\partial^2 d}{\partial x \partial y}(s,\sigma(p,s))D_1\sigma(p,s)\cdot\xi\ ds \\ &= \frac{1}{2}\int_{\partial D(y,x)} \frac{\partial^2 d}{\partial x \partial y}(s,\sigma(p,s))|D_1\sigma(p,s)\cdot\xi|ds\ . \end{aligned}$$

En prenant la demi-somme des deux expressions précédentes, on trouve

$$N(\xi) = \frac{1}{4}\int_{\partial D} \frac{\partial^2 d}{\partial x \partial y}(s,\sigma(p,s))|D_1\sigma(p,s)\cdot\xi|\ ds\ .$$

Les hypothèses faites sur d assurent qu'il s'agit bien d'une norme sur chaque espace tangent, et que l'application $\xi \in TD \mapsto N(\xi)$ est continue. D'autre part, il est clair par définition même de N que la distance associée à cette métrique finslérienne est δ.

4) Problèmes d'isométries.

Soit d une distance sur ∂D vérifiant les hypothèses de théorème 1. Le résultat qui suit assure qu'à deux systèmes de courbes Γ_1 et Γ_2 distincts correspondent via le théorème 1 deux distances δ_1 et δ_2 sur D qui sont différentes :

LEMME. — *Soit d une distance sur ∂D qui vérifie la condition ($>$) et Γ un système de courbes admissibles. Supposons qu'il existe une Γ-distance δ sur D qui prolonge d ; alors entre deux points distincts p et q de D il existe un unique chemin minimisant et c'est la courbe admissible de Γ qui passe par ces deux points.*

Preuve. — Il suffit d'examiner le cas particulier où x et y sont éléments de ∂D, le cas général s'en déduisant immédiatement ; $\gamma_{x,y}$ est alors un chemin minimisant entre x et y. Soit p un point de D qui n'est pas sur $\gamma_{x,y}$. Comme $\sigma(p,x) \neq y$, la continuité de $\sigma(p,\cdot)$ assure qu'il existe un point z de ∂D tel que les quatre points x, z, $\sigma(p,z)$ et y (ou y, $\sigma(p,z)$, z et x) soient deux à deux distincts et apparaissent dans cet ordre sur ∂D. Comme d vérifie ($>$), $\mu(\xi_1) > 0$ avec $\xi_1 = [x,z] \cap [y,\sigma(p,z)]$. Si $\mathcal{E}_2$ désigne $[x,p] \cap [p,y]$, on a clairement $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_2$, donc $\mu(\mathcal{E}_2) > 0$; d'autre part $\delta(x,p)+\delta(p,y) = \delta(x,y)+\frac{1}{2}\mu(\mathcal{E}_2)$, donc tout chemin passant par x, y et p a une longueur strictement supérieure à $\delta(x,y)$; d'où la conclusion.

Il reste à déterminer quand ces deux distances sont isométriques, c'est-à-dire qu'il existe un homéomorphisme Φ de D dont la restriction à ∂D est l'identité et qui vérifie $\forall p,q \in D$, $\delta_1(p,q) = \delta_2(\Phi(p),\Phi(q))$.

DÉFINITION. — *Deux systèmes de courbes admissibles Γ_1 et Γ_2 sont équivalents s'il existe un homéomorphisme Ψ de D dont la restriction à ∂D est l'identité et pour lequel on a : $\forall x,y \in \partial D$ avec $x \neq y$, $\Psi(\gamma^1_{x,y}) = \gamma^2_{x,y}$.*

LEMME. — *δ_1 et δ_2 sont isométriques si et seulement si Γ_1 et Γ_2 sont équivalents.*

La démonstration est immédiate si l'on remarque que d'après le lemme précédent, $\gamma^i_{x,y} = \{z \in D \ / \ \delta_i(x,y) = \delta_i(x,z) + \delta_i(z,y)\}$ pour $i = 1$ et 2.

Pour obtenir des distances non isométriques, il faut donc construire des systèmes de courbes non équivalentes ; ce qui est possible grâce au résultat suivant :

THÉORÈME (de Beltrami ; voir [Sp]). — *Soit U un ouvert du plan muni d'une métrique riemannienne g ; s'il existe $\Phi : U \to \Phi(U) \subset \mathbf{R}^2$ un homéomorphisme qui envoie toute g-géodésique de U sur un segment de droite euclidienne dans $\Phi(U)$, alors g est à courbure constante.*

Munissons D d'une métrique riemannienne g à courbure négative ou nulle mais non constante, et pour laquelle D est convexe et définissons un système de courbes admissibles Γ_1 en prenant pour $\gamma_{x,y}$ la g-géodésique de x à y. Soit Γ_2 le système de courbes admissibles obtenu par le même procédé en prenant pour g la métrique euclidienne. D'après le théorème précédent, Γ_1 et Γ_2 ne sont pas équivalents. Cela prouve le

THÉORÈME 3. — *Soit d une distance sur ∂D*

a) si d vérifie la condition (>) et si d est C^1 sur $\partial D \times \partial D \setminus \Delta$, alors il existe deux espaces de longueur non isométriques (D, δ_1) et (D, δ_2) avec $B(\delta_1) = B(\delta_2) = d$.

b) si d est C^2 sur $\partial D \times \partial D \setminus \Delta$ avec $\frac{\partial^2 d}{\partial x \partial y} > 0$, alors il existe sur D deux métriques finslériennes N_1 et N_2 avec $B(N_1) = B(N_2) = d$ et (D, N_1) non isométrique à (D, N_2).

Exemple. — Prenons pour d la distance euclidienne. Alors il existe sur D une métrique finslérienne N non isométrique à la métrique euclidienne sur D et vérifiant $B(N) = d$. De plus, on peut affirmer que N n'est pas une métrique riemannienne grâce au théorème rappelé dans l'introduction.

Bibliographie

[Al] ALEXANDER R. — *Planes for which the lines are the shortest paths between points*, Illinois J. Math. **22** (1978), 177–190.

[Am] AMBARTZUMIAN R.V. — *A note on pseudometrics on the plane*, Z. Wahrscheinlichkeits theorie und verw. Gebiete **37** (1976), 145–155.

[Cr1] CROKE C.B. — *Rigidity for surfaces of non-positive curvature*, Comm. Math. Helv. **65** (1990), 150–169.

[Cr2] CROKE C.B. — *Rigidity and the distance between boundary points*, J. Diff. Geom. **33** (1991), 445–464.

[Ot] OTAL J.P. — *Sur les longueurs des géodésiques d'une métrique à courbure négative dans le disque*, Comm. Math. Helv. **65** (1990), 334–347.

[Sp] SPIVAK M. — *A comprehensive introduction to differential geometry*, volume IV, chapitre 7, Publish or Perish, 1975.

[Me] MÉTIVIER M. — *Notions fondamentales de la théorie des probabilités*, Dunod, 1968.

Marc ARCOSTANZO
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
URA188 du CNRS
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)