

Institut Fourier — Université de Grenoble I

*Actes du séminaire de*  
**Théorie spectrale  
et géométrie**

Jean RAIMBAULT

**Géométrie et topologie des variétés hyperboliques de grand volume**

Volume 31 (2012-2014), p. 163-195.

[http://tsg.cedram.org/item?id=TSG\\_2012-2014\\_\\_31\\_\\_163\\_0](http://tsg.cedram.org/item?id=TSG_2012-2014__31__163_0)

© Institut Fourier, 2012-2014, tous droits réservés.

L'accès aux articles du Séminaire de théorie spectrale et géométrie (<http://tsg.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://tsg.cedram.org/legal/>).

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du*  
*Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques*  
<http://www.cedram.org/>

# GÉOMÉTRIE ET TOPOLOGIE DES VARIÉTÉS HYPERBOLIQUES DE GRAND VOLUME

Jean Raimbault

RÉSUMÉ. — Cet article est un survol autour de deux prépublications récentes [2] et [39], qui se posent la question de l'étude de certains invariants topologiques et géométriques dans des suites d'espaces localement symétriques dont le volume tend vers l'infini. On donne aussi quelques applications à divers modèles de surfaces aléatoires.

## 1. Introduction

Dans cet article en grande partie expositoire on s'intéressera à quelques aspects de la question suivante : on prescrit des bornes géométriques locales (par exemples, dans le cadre Riemannien, des bornes sur la courbure sectionnelle ou de Ricci, ou plus drastiquement on prescrit la classe d'isométrie locale), et on se demande si ces conditions imposent des contraintes *globales* sur la géométrie, la topologie et leurs relations. Un exemple classique et frappant de résultat allant dans cette direction est le théorème de Marcel Berger et Daniel Grove et Katsuhiko Shiohama selon lequel, si une variété riemannienne compacte a toutes ses courbures sectionnelles supérieures à 1 et un diamètre strictement plus grand que  $\pi/2$  alors elle est en fait difféomorphe à la sphère de même dimension (cf. [36, Theorem 81]). Un autre exemple est le résultat de Misha Gromov qui donne des bornes absolues (ne dépendant que de la dimension) sur le rang du groupe fondamental et les nombres de Betti (à coefficients arbitraires) d'une variété à courbure sectionnelle positive (cf. [36, Theorem 86]).

Nous nous intéresserons ici plutôt à la classe des espaces à courbure négative, pour lesquels la situation est très différente. En effet, même si

---

*Crédits* : Je suis redevable à Bram Petri de nombreuses remarques et corrections sur la section concernant les surfaces aléatoires. Je voudrais aussi remercier Ian Biringer pour m'avoir expliqué son travail avec Miklós Abért.

on impose une courbure sectionnelle constante il existe en toute dimension donnée une infinité de types topologiques, en fait les nombres de Betti peuvent être arbitrairement grands (cf. [28]). En revanche, sous la même condition de courbure négative constante et sauf en dimension trois <sup>(1)</sup>, pour un  $V > 0$  donné il n'existe à difféomorphisme près qu'un nombre fini de variétés  $M$  satisfaisant en plus à une borne  $\text{vol}(M) \leq V$ . On s'intéresse alors naturellement aux contraintes imposées par le volume sur la géométrie globale et la topologie. Par exemple un théorème aussi dû à Gromov affirme que les nombres de Betti sont bornés linéairement en le volume (pour une variété ayant des courbures sectionnelles entre  $-1$  et  $0$  et pas de facteur euclidien, avec une constante dépendant uniquement de la dimension—cf. [6, Theorem 2]).

Les résultats sur lesquels nous nous attarderons dans ce survol concerneront les espaces localement symétriques à courbure négative sans facteurs euclidiens, autrement dit les quotients  $\Gamma \backslash X$  où  $X = G/K$  est l'espace symétrique associé à un groupe de Lie semisimple  $G$  et un sous-groupe compact maximal  $K \subset G$ , et  $\Gamma$  un réseau de  $G$ , c'est-à-dire un sous-groupe discret tel que  $G/\Gamma$  ait une mesure borélienne finie et  $G$ -invariante. Dans ce cadre on s'intéresse à la géométrie globale principalement à travers les invariants métriques  $\text{vol}(M_{\leq R})/\text{vol}(M)$  où  $M_{\leq R}$  désigne la partie  $R$ -mince <sup>(2)</sup>, autrement dit le sous-ensemble des points de  $M$  autour desquels le rayon maximal d'une boule plongée est plus petit que  $R/2$  (de manière équivalente, il existe un lacet homotopiquement non-trivial sur  $M$  passant par ce point et de longueur inférieure à  $R$ ). On s'intéressera à l'étude de suites de variétés où cette quantité tend vers  $0$ , à la fois pour ses conséquences topologiques non-triviales (cf. 2.4, 3.3.2) et pour l'abondance de situations où cette condition est réalisée (cf. 2.5, 3.2 et 3.3).

Cette condition peut être interprétée comme la convergence vers le revêtement universel  $X$  dans une certaine compactification de l'espace des réseaux  $\Gamma$  de  $G$ . Pour définir cette compactification il faut introduire la topologie de Benjamini–Schramm sur les espaces métriques aléatoires pointés, qui est une version probabiliste de la topologie bien connue de Gromov–Hausdorff pointée. Les objets que l'on doit alors considérer ne sont alors plus des sous-groupes discrets de  $G$ , mais des mesures de probabilités invariantes par conjugaison sur l'espace des sous-groupes fermés de ce dernier. Ces sous-groupes aléatoires invariants ont été introduits par Miklós

---

1. Le cas de la dimension trois est assez différent mais bien compris grâce aux travaux de Thurston sur la chirurgie de Dehn hyperbolique.

2. Certains utilisent plutôt “fin” pour traduire l'anglais *thin*, mais le terme de “partie fine” me semble maladroit en français.

Abért, Balint Virág et Yair Glasner dans [4], et ont récemment fait l'objet d'assez nombreux travaux (cf. [18] pour un exemple et de nombreuses autres références récentes). Dans cet article on essaiera plutôt de dégager les conséquences géométriques de l'étude des sous-groupes aléatoires des groupes de Lie, qui constituent un puissant outil pour l'étude des variétés de grand volume, témoins les théorèmes 2.11 et 3.8 ci-dessous. Le pendant plus géométrique de ces derniers, qui sera très peu exploré ici, est donné par les mesures de probabilité unimodulaires sur les espaces de variétés riemanniennes ; on réfère à [3] pour plus de détails. Citons aussi l'article [32], qui étudie dans un langage plus géométrique la topologie des limites de certaines suites de métriques riemanniennes sur une variété donnée.

On peut encore restreindre le cadre d'étude en s'intéressant aux variétés arithmétiques, qui sont une famille particulière construites à partir de réseaux généralisant l'exemple  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ . Une sous-famille distinguée est donnée par les réseaux dits de congruence<sup>(3)</sup> Ces derniers ont souvent des propriétés géométriques particulièrement régulières : par exemple leurs constantes de Cheeger sont uniformément bornées inférieurement (un résultat remontant à Atle Selberg pour les surfaces hyperboliques, prouvé dans la plus grande généralité par Laurent Clozel dans [15]). Leur origine arithmétique permet de plus d'attaquer les problèmes géométriques en utilisant les outils de la théorie des nombres : un exemple frappant est le problème du volume minimal pour les variétés hyperboliques, qui est encore complètement ouvert en grandes dimensions mais qui dans le cadre des variétés arithmétiques est sinon résolu complètement, au moins plus près d'une telle résolution (on réfère à [7] pour un survol récent du sujet). Pour ce qui est de la convergence de Benjamini–Schramm vers le revêtement universel on peut l'établir directement (sans utiliser les sous-groupes aléatoires) dans plusieurs cas : voir les théorèmes 2.13 et 3.8 ci-dessous.

Les résultats sur la topologie de Benjamini–Schramm évoqués ci-dessus ne sont pas nouveaux, et proviennent pour la plupart des articles [2] et [39]. Nous apportons aussi dans cet article quelques observations et résultats originaux :

- Le théorème 3.3 donne une classification topologique des sous-groupes aléatoires invariants de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  (démontrée dans l'appendice A écrit avec I. Biringer).
- En 3.2 on donne une interprétation de résultats de Maryam Mirzakhani [31] et de Robert Brooks et Eran Makover [13] comme résultats

---

3. Que l'on ne définira pas ici ; mais ils contiennent en particulier les réseaux maximaux, et voir aussi 2.5.2 pour plus d'exemples.

de convergence, et leur conséquences pour le spectre des surfaces aléatoires.

Cet article est organisé comme suit : en 2 on donne un résumé de la plupart des résultats et notions contenus dans [2] : on introduit en 2.1, dans un cadre général, la notion de convergence de Benjamini–Schramm, que l’on spécialise ensuite au cadre des espaces localement symétriques. On indique les liens précis avec les sous-groupes aléatoires dans la section 2.2. La section suivante 2.3 donne quelques propriétés de ces derniers, puis en 2.4 on montre comment déduire de la convergence de Benjamini–Schramm des résultats de multiplicités limites pour les valeurs propres des laplaciens. La dernière section 2.5 de cette partie présente les deux cas de convergence étudiés dans [2]. La seconde partie est centrée sur les variétés hyperboliques réelles : on commence en 3.1 par un exposé des résultats connus sur les sous-groupes invariants des groupes  $SO(n, 1)$  (y compris le théorème démontré dans l’appendice A). Puis la section 3.2 interprète quelques résultats connus sur certains modèles aléatoires de surfaces hyperboliques à la lumière de la convergence de Benjamini–Schramm. Enfin la section 3.3 essaie de dégager quelques idées sur la convergence des variétés hyperboliques en plus grandes dimensions (on s’y permet d’être plus spéculatif que dans le reste de l’article).

## 2. Convergence de Benjamini–Schramm

### 2.1. Généralités

Soit  $\mathcal{X}$  l’ensemble des espaces métriques localement compacts pointés (ou plutôt de leurs classes d’isométrie) ; on va définir dans cette section des topologies sur  $\mathcal{X}$  et  $\text{Prob}(\mathcal{X})$  respectivement. La topologie sur  $\mathcal{X}$  est bien connue et appelée topologie de Gromov-Hausdorff ; des comptes-rendus détaillés en sont donnés par exemple dans [36, Chapter 10] ou [25, Chapter 3]. Sur le sous-ensemble de  $\mathcal{X}$  formé des espaces compacts pointés on définit une distance comme suit : si  $A, B$  sont des sous-espaces compacts d’un espace métrique  $Z$  leur distance de Hausdorff  $d_H(A, B)$  est l’infimum des  $\varepsilon > 0$  tels que  $A, B$  soient chacun contenu dans le  $\varepsilon$ -voisinage (dans  $Z$ ) de l’autre ; si  $(X, x), (Y, y)$  sont des espaces compacts pointés on pose alors

$$d((X, x), (Y, y)) = \inf_{Z, \phi} (d_H(\phi_1(X), \phi_2(Y)) + d_Z(\phi_1(x), \phi_2(y)))$$

où l’infimum est pris sur l’ensemble des espaces métriques compacts  $Z$  et des paires de plongements isométriques  $\phi_1 : X \rightarrow Z, \phi_2 : Y \rightarrow Z$  ; on

vérifie que cela définit bien une distance. En particulier, pour tout  $R > 0$  on obtient une topologie sur l'espace  $\mathcal{X}_R$  des boules de rayon  $R$  pointées en leur centre (i.e. les espaces pointés  $(X, x)$  tels que  $d(x, y) \leq R$  pour tout  $y \in X$ ). On a une application  $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_R$  définie par  $(X, x) \mapsto B_X(x, R)$ , et on définit la topologie de Gromov–Hausdorff sur  $\mathcal{X}$  comme la plus faible qui rende continues toutes ces applications. Il n'est alors pas dur de voir qu'une suite  $(X_n, x_n)$  converge vers  $(X, x)$  si et seulement si pour tous  $R, \varepsilon > 0$ , et pour  $n$  assez grand, la boule  $B_{X_n}(x_n, R)$  est  $(1 + \varepsilon, \varepsilon)$ -quasi-isométrique à  $B_X(x, R)$ .

L'espace  $\mathcal{X}$  muni de cette topologie n'est pas compact, cependant il contient de nombreux sous-ensembles qui le sont : typiquement, si on prescrit des bornes locales sur la géométrie d'une suite d'espaces on obtient des parties relativement compactes dans  $\mathcal{X}$ . Pour des exemples riemanniens on réfère par exemple à [36, Chapitre 10, 3.4]. Un exemple plus simple est donné par l'ensemble des graphes dans lesquels la valence de chaque sommet est uniformément bornée.

La topologie introduite ci-dessus a donc de bonnes propriétés de compacité, mais en général elle est complètement aveugle aux propriétés globales des espaces étudiés. Pour remédier à cela, tout en conservant ses propriétés désirables, on va passer à l'étude de  $\text{Prob}(\mathcal{X})$ , l'espace des mesures de probabilités boréliennes sur  $\mathcal{X}$  que l'on munit de la topologie de la convergence faible des mesures. Cette dernière a été nommée dans [2] topologie de Benjamini–Schramm, à la suite du travail pionnier de ces auteurs sur les graphes finis dans [8]. Dans le reste de cet article on s'intéressera surtout à l'étude de cette notion dans le cadre des espaces localement symétriques. Dans le cadre plus large des variétés riemanniennes, il y a essentiellement deux façons naturelles de construire des éléments de  $\text{Prob}(\mathcal{X})$  :

- (i) Si  $M$  est une variété de volume fini, on peut considérer la mesure de probabilité sur  $\mathcal{X}$  obtenue en pointant  $M$  en un point choisi aléatoirement pour la mesure de probabilité induite par  $\nu = d \text{vol} / \text{vol}(M)$  sur  $M$  (i.e. le poussé en avant de  $\nu$  par l'application  $M \rightarrow \mathcal{X}, x \mapsto (M, x)$ ).
- (ii) Si  $X$  est un espace topologique munie d'un feuilletage  $\mathcal{F}$  par variétés riemanniennes et d'une mesure de probabilité  $\nu$  (de préférence invariante par rapport au feuilletage), on a une application  $X \rightarrow \mathcal{X}$  donnée par  $x \mapsto (\mathcal{F}_x, x)$  et on peut considérer le poussé en avant de  $\nu$ .

Evidemment, (i) est un cas particulier de (ii) (où le feuilletage est trivial). On remarque que la construction (ii) est réminiscente des feuilletages apparaissant comme limites de revêtements finis dans [9]. Des exemples plus

spécifiques de ces deux constructions (dans le cadre localement symétrique) seront données plus bas. Une étude plus systématique des variétés riemanniennes pointées aléatoires est entreprise dans [3].

## 2.2. Espaces localement symétriques et sous-groupes aléatoires invariants

### 2.2.1. Topologie de Chabauty

Soit  $G$  un groupe de Lie semisimple ; on note  $\text{Sub}_G$  l'espace des sous-groupe fermés de  $G$  muni de la topologie de Chabauty<sup>(4)</sup>. On a alors les propriétés élémentaires suivantes :

- (i) L'espace  $\text{Sub}_G$  est compact ;
- (ii) Le point  $G$  est isolé dans  $\text{Sub}_G$  ;

Soit  $K$  un sous-groupe compact maximal,  $X = G/K$  muni de la métrique riemannienne  $G$ -invariante qui en fasse un espace symétrique ; on note  $x_0$  l'unique point fixe de  $K$  dans  $x$ , et si  $x \in X$  et  $\Gamma$  est un sous-groupe discret de  $G$  on note  $\bar{x}$  l'image de  $x$  dans  $\Gamma \backslash X$ . Le résultat suivant est bien connu (cf. [2, Proposition 3.3]).

LEMME 2.1. — *Soient  $\Gamma_n, n \geq 1$  et  $\Lambda$  des sous-groupes discrets de  $G$ . La suite  $(\Gamma_n \backslash X, \bar{x}_0)$  converge vers  $(\Lambda \backslash X, \bar{x}_0)$  dans  $\mathcal{X}$  si et seulement si  $\Gamma_n$  converge vers  $\Lambda$  dans la topologie de Chabauty.*

### 2.2.2. Sous-groupes aléatoires invariants

Un *sous-groupe aléatoire* de  $G$  est par définition une mesure de probabilité borélienne sur  $\text{Sub}_G$  qui est invariante par les applications  $H \mapsto gHg^{-1}$  pour  $g \in G$ . Dans la suite on abrégiera souvent ce nom en IRS, pour ne pas surcharger le texte. Un IRS  $\mu$  de  $G$  est dit ergodique si l'action de  $G$  sur  $(\text{Sub}_G, \mu)$  l'est. De manière (non-trivialement) équivalente, un IRS ergodique est le tiré en arrière d'une mesure de probabilité invariante dans une action ergodique de  $G$  (cf. [2, Theorem 2.4]). Les exemples fondamentaux d'IRS ergodiques dans les groupes de Lie sont les suivants :

---

4. Restriction de la topologie de Hausdorff ; cette topologie a été initialement considérée par Claude Chabauty dans [14] ; une description des ouverts est donnée dans [2, Section 2].

- Les masses de Dirac sur les sous-groupes normaux ; en particulier, on a toujours au moins deux IRS ergodiques de  $G$ , notés  $\delta_G$  et  $\delta_{\{Id\}}$  et qui sont les masses de Dirac supportées respectivement sur  $G$  lui-même et sur le sous-groupe trivial.
- Si  $\Gamma$  est un réseau (sous-groupe discret de covolume fini pour la mesure de Haar), soit  $\mu$  la mesure de probabilité  $G$ -invariante sur  $G/\Gamma$ ,  $\Phi$  l'application

$$G/\Gamma \rightarrow \text{Sub}_G, g\Gamma \mapsto g\Gamma g^{-1}.$$

Alors le poussé en avant  $\Phi_*\mu$  est un IRS ergodique (supporté sur les conjugués de  $\Gamma$  dans  $G$  ; dans la suite on le notera  $\mu_\Gamma$ ).

Une autre construction de sous-groupes aléatoires invariants importante pour la suite est l'induction depuis un réseau  $\Gamma \leq G$  : si  $\nu$  est un IRS de  $G$ , on peut construire un IRS  $\mu_\nu$  de  $G$  supporté sur les conjugués par  $G$  des groupes dans le support de  $\nu$ . La construction est détaillée dans [2, 11.1], informellement elle revient à choisir d'abord un sous-groupe  $\mu_\Gamma$ -aléatoire de  $G$  puis un sous-groupe  $g_*\nu$ -aléatoire de ce conjugué par  $g$  de  $\Gamma$ . En particulier, si  $\Lambda \leq \Gamma$  est un sous-groupe distingué alors on a une application  $G/\Gamma \rightarrow \text{Sub}_G, g\Gamma \mapsto g\Lambda g^{-1}$  et le poussé en avant de la mesure de la mesure de probabilité invariante sur  $G/\Gamma$  est un IRS de  $G$  que l'on notera  $\mu_\Lambda$ , supporté sur les conjugués de  $\Lambda$  de  $G$ . On donnera des exemples d'IRS des groupes  $SO(d, 1)$  utilisant les spécificités de la géométrie hyperbolique (en particulier en dimensions  $d = 2, 3$ ) dans la deuxième partie de cet article.

### 2.2.3. IRS et convergence de Benjamini–Schramm

Si  $\nu$  est un IRS de  $G$  supporté sur des sous-groupes discrets, on obtient une mesure de probabilité  $m(\nu)$  sur  $\mathcal{X}$  en poussant en avant  $\nu$  par l'application  $\text{Sub}_G \rightarrow \mathcal{X}, \Gamma \mapsto (\Gamma \backslash X, \bar{x}_0)$  (l'application est bien définie sur le support de  $\nu$ ). On a alors le résultat suivant, version probabiliste du lemme 2.1 (cf. [2, Corollary 3.4]).

LEMME 2.2. — *Si  $\nu_n, n \geq 1$  et  $\nu_\infty$  sont des IRS de  $G$ , on a  $m(\nu_n) \rightarrow m(\nu_\infty)$  dans  $\text{Prob}(\mathcal{X})$  si et seulement si  $\nu_n \rightarrow \nu_\infty$  dans l'espace des IRS de  $G$ .*

Si  $M$  est une  $X$ -variété de volume riemannien fini alors l'IRS de  $G$  défini par  $\mu_\Gamma$ , où  $\Gamma$  est l'image de  $\pi_1(M)$  dans  $G$  par une application de monodromie, ne dépend pas du choix de point base ; on le notera  $\mu_M$ . Par le lemme ci-dessus, on peut caractériser la convergence vers  $X$  dans le sens introduit en 1 comme suit.



LEMME 2.3. — Soient  $X = G/K$  un espace localement symétrique (de type non-compact, sans facteur euclidien) et  $M_n$  une suite de variétés localement isométriques à  $X$ , de volume fini. Alors on a

$$(2.1) \quad \forall R > 0, \frac{\text{vol}(x \in M_n : \text{inj}_x(M_n) \leq R)}{\text{vol } M_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

si et seulement si les IRS  $\mu_{M_n}$  convergent vers  $\delta_{\{\text{Id}\}}$  (au sens de la convergence faible des mesures).

### 2.3. Propriétés des sous-groupes aléatoires invariants

#### 2.3.1. Zariski-densité

La propriété des sous-groupes aléatoires invariants d'un groupe semi-simple la plus importante pour nous est le théorème suivant [2, Theorem 2.6], une généralisation du classique théorème de densité de Borel.

THÉORÈME 2.4. — Soit  $G$  un groupe de Lie simple ; alors les IRS non-atomiques de  $G$  sont supportés sur les sous-groupes discrets et Zariski-denses de  $G$ .

En rang un on a une propriété plus forte (le résultat suivant est un cas particulier de [2, Proposition 11.3]).

THÉORÈME 2.5. — Soit  $X$  un espace symétrique irréductible de rang un,  $G = \text{Isom}(X)^\circ$  et  $\mu$  un IRS de  $G$  sans atomes. Alors  $\mu$ -presque tout sous-groupe a un ensemble limite égal à  $\partial X$ .

Toujours en se restreignant au rang un, on peut déduire de la Zariski-densité le critère de BS-convergence suivant [39, Proposition 2.3].

PROPOSITION 2.6. — Soit  $X$  un espace localement symétrique irréductible de rang un et  $M_n$  une suite de variétés de volume fini localement isométriques à  $X$ . Alors  $M_n$  est convergente au sens de Benjamini–Schramm vers  $X$  si et seulement si on a, pour tout  $R > 0$  :

$$\frac{|\{\text{géodésiques de longueur} \leq R \text{ sur } M_n\}|}{\text{vol } M_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

### 2.3.2. Théorème de Nevo–Stück–Zimmer

Pour les groupes simples de rang supérieur on a une description complète des IRS, dûe à Garrett Stück et Robert Zimmer [43] (une erreur dans la preuve d'un résultat intermédiaire crucial a été corrigée par Amos Nevo et Zimmer [33]).

**THÉORÈME 2.7 (Nevo–Stück–Zimmer).** — *Soit  $G$  un groupe de Lie semisimple, de rang réel supérieur à 2, dont tous les facteurs ont la propriété (T) de Kazhdan. Soit  $\mu$  un sous-groupe aléatoire invariant de  $G$  qui soit ergodique, sans atome et irréductible. Alors il existe un réseau  $\Gamma$  de  $G$  tel que  $\mu = \mu_\Gamma$  (défini plus haut).*

Si tous les facteurs sont de rang supérieur, les IRS (pas forcément irréductibles) sont les produits des IRS des facteurs simples (auxquels le théorème ci-dessus s'applique). Le résultat de Stück et Zimmer traite aussi le cas du produit d'au moins deux groupes de rang un qui possèdent la propriété (T) de Kazhdan. Le cas général du produit de deux groupes de rang un fait l'objet de travaux en cours de Arie Levit (qui a aussi démontré une version nonarchimédienne de Stück–Zimmer).

## 2.4. Convergence de Benjamini–Schramm et multiplicités limites

### 2.4.1. Uniforme discrétion

On dit qu'un sous-ensemble  $S \subset \text{Sub}_G$  est uniformément discret s'il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $\text{Id}$  dans  $G$  tel que  $\Lambda \cap U = \{\text{Id}\}$  pour tout  $\Lambda \in S$ . Un ensemble  $\mathcal{M}$  d'IRS de  $G$  est dit uniformément discret si  $\bigcup_{\mu \in \mathcal{M}} \text{supp}(\mu)$  l'est ; en particulier, si  $\Gamma_n$  est une suite de réseaux de  $G$  elle est uniformément discrète si et seulement si les  $\Gamma_n$  sont cocompacts et leur systole est minorée par une constante positive.

### 2.4.2. Noyaux de la chaleur, valeurs propres du Laplacien et nombres de Betti

Si  $M$  est une variété riemannienne compacte, les opérateurs de Hodge–Laplace  $\Delta^p[M]$  sont des opérateurs différentiels elliptiques définis sur les espaces  $\Omega^p(M)$  de formes différentielles lisses sur  $M$ . Ils ne sont pas bornés

pour la structure pré-hilbertienne donnée par le produit scalaire  $L^2$  des éléments de  $\Omega^p(M)$ , mais admettent une unique extension maximale comme opérateurs symétriques positifs essentiellement autoadjoints sur l'espace de Hilbert  $L^2\Omega^p(M)$  des formes de carré intégrable. De plus, leur spectre est discret à multiplicités finies, i.e. on a des suites  $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots$  et  $m(\lambda_j, M) > 0, j \geq 1$  et telles que l'espace propre  $\ker(\Delta^p[M] - \lambda_j)$  soit de dimension  $m(\lambda_j, M)$  et l'espace  $L^2\Omega^p(M)$  soit la somme hilbertienne de ces sous-espaces. On définit la mesure spectrale normalisée  $\nu_M^p$  comme suit :

$$\nu_M^p(S) = \frac{1}{\text{vol } M} \sum_{\lambda \in S} m(\lambda, M).$$

Le noyau de la chaleur de  $M$  est un tenseur  $e^{-t\Delta^p[M]}$  sur  $M \times M$ , tel que

$$e^{-t\Delta^p[M]}(x, y) \in \text{Hom}(\wedge^p T_x M, \wedge^p T_y M),$$

qui peut être défini comme la solution fondamentale à une équation de la chaleur appropriée sur  $M$  (cf. par exemple [44, Chapter V]). La convolution avec  $e^{-t\Delta^p[M]}$  définit un opérateur borné sur  $L^2\Omega^p(M)$  (qui est aussi donné par le calcul spectral appliqué à  $\Delta^p[M]$  et à la fonction  $\lambda \mapsto e^{-t\lambda}$ , d'où la notation). C'est un opérateur à trace, et la formule des traces (qui est à peu près une conséquence immédiate des définitions dans le cas d'une variété compacte) donne l'égalité

$$(2.2) \quad \text{Tr } e^{-t\Delta^p[M]} := \sum_{j \geq 0} m(\lambda_j) e^{-t\lambda_j} = \int_M \text{tr } e^{-t\Delta^p[M]}(x, x).$$

Le résultat suivant est prouvé dans [17]

LEMME 2.8. — *Si les  $M_n, n \geq 1$  sont des variétés riemanniennes, et s'il existe une mesure borélienne  $\nu$  sur  $[0, +\infty[$  telle que l'on ait la limite*

$$\frac{\text{Tr } e^{-\Delta^p[M_n]}}{\text{vol } M_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} e^{-t\lambda} d\nu(\lambda)$$

pour tout  $t > 0$ , alors la suite des mesures spectrales  $\nu_{M_n}^p$  converge faiblement vers  $\nu$ .

Si  $X = G/K$  est un espace symétrique, le spectre n'est plus discret mais on peut quand même définir des mesures spectrales  $\nu_X^p$ . Le terme de droite du lemme ci-dessus est alors donné par la trace ponctuelle d'un noyau invariant sur  $X$  (aussi obtenu comme une solution fondamentale à une équation de la chaleur sur  $X$ ), i.e.

$$\int_0^{+\infty} e^{-t\lambda} d\nu_X^p(\lambda) = \text{tr } e^{-t\Delta^p[X]}(x, x) =: \text{Tr}^{(2)} e^{-t\Delta^p[X]}$$

pour n'importe quel  $x \in X$ . On a alors le résultat suivant, qui sous la condition d'uniforme discrétion suit facilement de la formule des traces (2.2), d'estimées bien connues sur la taille des orbites d'un réseau et sur la décroissance des noyaux de la chaleur (cf. [2, Corollary 8.27]), et du lemme 2.8. La suppression de cette hypothèse pour le rang un nécessite plus de travail (cf. [2, Section 9]).

PROPOSITION 2.9. — *Si  $X$  est un espace symétrique,  $M_n$  une suite de  $X$ -variétés compactes qui soit convergente au sens de Benjamini–Schramm vers  $X$ . Si les  $M_n$  ont une systole uniformément minorée, ou si  $X$  est de rang un, alors on a*

$$\mathrm{Tr} e^{-t\Delta^p[M_n]} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathrm{Tr}^{(2)} e^{-t\Delta^p[X]}$$

pour tout  $t > 0$ . En particulier, pour tous  $b > a \geq 0$  on a

$$\frac{1}{\mathrm{vol} M_n} \sum_{\lambda_j \in [a,b]} m(\lambda_j, M_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \nu_X^p([a, b]).$$

Un autre corollaire est le résultat suivant.

COROLLAIRE. — *Soient  $X, M_n$  comme ci-dessus. Pour tout degré  $p \neq \dim X/2$  on a la limite :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_p(M_n)}{\mathrm{vol} M_n} = 0.$$

Pour  $p = \dim X/2$  la limite est calculée par le théorème de Chern–Gauss–Bonnet : elle ne dépend que de  $X$ , peut être exprimée comme  $\chi(M)/\mathrm{vol}(M)$  pour n'importe quelle  $X$ -variété compacte  $M$ . Elle n'est non nulle que dans le cas où  $G$  contient un sous-groupe de Cartan compact (i.e.  $G$  et  $K$  ont même rang complexe), par exemple dans le cas où  $X = \mathbb{H}^{2m}$  on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_m(M_n)}{\mathrm{vol} M_n} = \frac{2}{V_{2m}}$$

pour toute suite  $M_n$  qui soit BS-convergente vers  $\mathbb{H}^{2m}$ , où  $V_{2m}$  est le volume de la sphère unité dans  $\mathbb{R}^{2m+1}$ .

### 2.4.3. Valeurs propres exceptionnelles

Nous nous restreindrons dans cette section aux variétés hyperboliques réelles (bien que les résultats soient valides pour des espaces localement

symétriques plus généraux). Les mesures  $\nu_X^p$  pour  $X = \mathbb{H}^d$  sont assez bien connues ; en particulier, pour  $p < d/2$  elles sont supportées sur l'intervalle

$$\left[ \left( p - \frac{d-1}{2} \right)^2, +\infty \right[.$$

On note  $\lambda(d, p) = (p - (n-1)/2)^2$  la borne inférieure de ce support, et si  $M$  est une  $d$ -variété hyperbolique on dira qu'une valeur propre  $\lambda$  du laplacien  $\Delta^p[M]$  est exceptionnelle si  $\lambda < \lambda(d, p)$ . Une telle valeur propre est nécessairement isolée. Le résultat suivant est alors une conséquence de [2, Theorem 1.9].

**THÉORÈME 2.10.** — *Pour tous  $d, p, p < (d-1)/2$  et tous  $\varepsilon, \delta > 0$  il existe une fonction décroissante  $\alpha : [0, \lambda(d, p)] \rightarrow [0, 1]$ , telle que  $\alpha(\lambda(d, p)) = 0$ , ayant la propriété suivante. Si  $M$  est une  $d$ -variété hyperbolique compacte satisfaisant*

$$\text{vol}(M_{\leq \varepsilon \log \text{vol}(M)}) \leq \text{vol}(M)^{1-\delta}, \quad \text{inj}(M) \geq \delta$$

et  $\lambda$  une valeur propre exceptionnelle de degré  $p$  de  $M$  alors on a

$$m(\lambda, M) \leq (\text{vol } M)^{1-\alpha(\lambda)}$$

pour  $\text{vol}(M)$  assez grand (dépendant de  $\varepsilon, \delta, d$ ).

## 2.5. Applications

### 2.5.1. Rang supérieur

Soit  $G$  un groupe de Lie réel simple, de rang supérieur et soit  $X$  l'espace symétrique associé. Avec un peu de travail on peut déduire du théorème de Nevo–Stück–Zimmer 2.7 le résultat suivant [2, Theorem 1.5].

**THÉORÈME 2.11.** — *Soit  $M_n$  une suite de  $X$ -variétés (deux à deux non-isométriques). Alors on a*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\text{vol}(M_n)_{\leq R}}{\text{vol } M_n} = 0.$$

On peut le reformuler de la manière suivante : il existe une fonction croissante  $f$  sur  $[0, +\infty[$  (dépendant de  $X$ ) telle que  $f(v)/v$  tende vers 0 quand  $v \rightarrow +\infty$ , et  $\text{vol}(M_{\leq R}) \leq f(\text{vol } M)$  pour toute  $X$ -variété  $M$ . On peut de plus appliquer les résultats de multiplicités limites plus haut à la suite  $M_n$  ou  $\Gamma_n$ .

2.5.2. Revêtements de congruence

Si  $\Gamma$  est un réseau d'un groupe de Lie semisimple  $G$  et  $\Gamma_n$  une suite de sous-groupes d'indice fini sans torsion de  $\Gamma$ , alors la convergence de Benjamini–Schramm des variétés  $M_n = \Gamma_n \backslash X$  est équivalente à ce que les  $\Gamma_n$  satisfassent un critère introduit par Michael Farber dans le cadre d'une généralisation du théorème d'approximation de Lück (cf. [19]).

LEMME 2.12. — *Soient  $\Gamma, \Gamma_n, M_n$  comme ci dessus, on suppose  $G$  simple. Alors la suite  $M_n$  est convergente au sens de Benjamini–Schramm vers  $X$  si et seulement si, pour tout  $g \in \Gamma$  semisimple la condition suivante est satisfaite :*

$$(2.3) \quad \frac{|\{\gamma \in \Gamma/\Gamma_n : \gamma^{-1}g\gamma \in \Gamma_n\}|}{|\Gamma/\Gamma_n|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

C'est en fait un cas particulier de la proposition 2.6, vu que le côté droit de (2.3) compte la proportion de la préimage de la géodésique fermée associée à  $\gamma$  qui soit de même longueur.

La principale application de ce lemme est aux sous-groupes de congruence. Commençons par rappeler ce que sont ces derniers : si  $\Gamma$  est un réseau arithmétique dans  $G$  il existe un entier  $n$  et une représentation fidèle  $\rho : G \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$  telle que  $\rho(\Gamma)$  soit contenu (forcément avec indice fini) dans  $G \cap \text{GL}_n(\mathbb{Z})$ . Si  $\Gamma'$  est un sous-groupe d'indice fini de  $\Gamma$  on dit alors qu'il est de congruence s'il existe un entier  $m \geq 1$  tel que  $\Gamma'$  contienne le noyau du morphisme  $\Gamma \rightarrow \text{GL}(\mathbb{Z}/m)$  (composée de  $\rho$  et de la réduction modulo  $m$  de  $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$ )<sup>(5)</sup>.

Dans ce cadre on a le résultat suivant (cf. [2, Theorem 1.12]).

THÉORÈME 2.13. — *Si  $\Gamma$  est un réseau arithmétique cocompact de  $G$  et  $\Gamma_n$  est une suite de sous-groupes de congruence de  $\Gamma$  (deux à deux distincts) alors il existe des constantes  $c, \alpha > 0$  telles que l'on ait pour tous  $R > 0$  et  $n$*

$$\text{vol}((M_n)_{\leq R}) \leq e^{cR}(\text{vol } M_n)^{1-\alpha}.$$

Dans le cas où  $\Gamma$  n'est que de covolume fini on n'obtient en général que la convergence de Benjamini–Schramm des  $M_n$  vers  $X$ ; cependant il est probable que les mêmes estimées restent valides (cf. [38, Theorem B] pour le cas des variétés hyperboliques en dimension 3).

---

5. Cette notion dépend a priori de la représentation  $\rho$ , mais uniquement à indice borné près. Pour une définition plus sophistiquée on réfère à [29, Chapter 6].

L'estimée précise sur le volume de la partie mince dans le théorème 2.13 permet aussi d'être plus précis pour les estimées de multiplicités de représentations non-tempéré via le théorème 2.10 . En particulier on a le résultat suivant (cf. aussi [2, Corollary 1.10]).

**THÉORÈME 2.14.** — *Soient  $d \geq 2$  et  $M$  variété arithmétique hyperbolique de dimension  $d$ ; pour tout  $p \neq d/2$  (si  $d$  est pair) ou  $p \neq (d \pm 1)/2$  (si  $d$  est impair) il existe un  $\alpha > 0$  tel que si  $M_n$  une suite de revêtements de congruence de  $M$  on ait*

$$b_p(M_n) \ll (\text{vol } M_n)^{1-\alpha}.$$

### 3. Variétés hyperboliques réelles

#### 3.1. Sous-groupes aléatoires invariants de $\text{SO}(n, 1)$

##### 3.1.1. Sous-groupes normaux

Les deux théorèmes 2.7 et 2.11 ci-dessus ne sont pas vrais en rang un. Plus précisément, on dispose de contre-exemples au théorème de Nevo–Stück–Zimmer pour tous les groupes de rang un, et au théorème 2.11 au moins pour  $G = \text{SO}(n, 1)$  ou  $\text{SU}(n, 1)$ . Les premiers proviennent de la construction d'IRS à partir de sous-groupes normaux de réseaux de  $G$  (cf. 2.2.2) et du résultat suivant, dû à Gromov et dont une preuve est donnée par exemple dans [45, Theorem 14.9].

**THÉORÈME 3.1.** — *Soit  $G$  un groupe de Lie semisimple de rang réel 1 et  $\Gamma$  un réseau de  $G$ . Il existe un sous-groupe normal  $\Lambda \leq \Gamma$  qui est infini et d'indice infini dans  $\Gamma$ .*

En revanche la construction de  $\Lambda$  dans le théorème ci-dessus (comme le sous-groupe normalement engendré par une géodésique fermée bien choisie) ne donne aucune indication sur la finitude résiduelle du groupe quotient  $\Gamma/\Lambda$  : on ne peut donc pas en déduire un contre-exemple au second résultat.

Il est par contre connu que pour tout réseau arithmétique  $\Gamma$  de  $\text{SO}(n, 1)$ ,  $n \neq 7$  (également pour une grande partie des réseaux arithmétiques en dimension 7 et pour tous les exemples non-arithmétiques connus), il existe un sous-groupe  $\Gamma' \leq \Gamma$  tel que  $\Gamma'$  se surjecte sur  $\mathbb{Z}$  (cf. [27] pour le cas arithmétique en dimensions  $n \neq 3, 7$ , [5] pour le cas général en dimension 3 et [28] pour les variétés hybrides). Le sous-groupe aléatoire invariant de

$SO(n, 1)$  induit à partir du noyau de cette surjection donne alors un contre-exemple au théorème 2.11 pour  $G = SO(n, 1)$ . Il existe aussi des réseaux dans  $SU(n, 1)$  ayant un morphisme non-trivial vers  $\mathbb{Z}$  (cf. [26]), et ceux-ci donnent donc aussi des contre-exemples pour  $G = SU(n, 1)$ .

Noter que d'après le théorème 2.13, si un réseau arithmétique  $\Gamma$  possède un IRS supporté sur des sous-groupes infinis, d'indice infini qui soit limite de sous-groupes d'indice fini (en particulier s'il existe un sous-groupe normal non-trivial  $\Lambda \leq \Gamma$  tel que  $\Gamma/\Lambda$  soit infini et résiduellement fini) alors le noyau de congruence de  $\Gamma$  est infini (en particulier, le théorème 2.7 est compatible avec la propriété des sous-groupes de congruence pour les réseaux d'ordre supérieur). Dans le cas hyperbolique complexe, il existe en toute dimension des variétés arithmétiques pour lesquelles on ne connaît pas l'existence d'un sous-groupe d'indice fini ayant une abélianisation infinie (et dont on sait en fait, d'après un théorème de Jon Rogawski [42], que tous leurs sous-groupes de congruence ont un premier nombre de Betti nul). Pour ces derniers il serait donc particulièrement intéressant d'exhiber un IRS approximable (ou un sous-groupe  $\Lambda$  comme ci-dessus).

### 3.1.2. Classifications topologiques en petites dimensions

On peut obtenir une classification partielle des variétés apparaissant dans les sous-groupes aléatoires invariants des isométries du plan ou de l'espace hyperbolique. Pour ce qui est des surfaces on a une classification topologique complète, pour les variétés de dimension trois on doit se limiter aux types topologiques finis. Le résultat pour ces dernières est dû à Miklós Abért et Ian Biringer. Il est démontré dans [3] et s'énonce comme suit.

**THÉORÈME 3.2** (Abért–Biringer). — *Soit  $\mu$  un IRS ergodique de  $PSL_2(\mathbb{C})$  tel que  $\mu$ -presque tout sous-groupe soit finiment engendré. On suppose de plus que  $\mu$  n'est pas supporté sur le sous-groupe trivial ou sur des réseaux. Alors  $\mu$  est supporté sur des sous-groupes de surfaces doublement dégénérés; en particulier il existe une surface hyperbolique  $S$  telle que pour  $\mu$ -presque tout  $\Gamma$  la variété  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^3$  soit difféomorphe à  $S \times \mathbb{R}$ .*

Le moyen le plus simple de construire de tels IRS est de considérer une variété hyperbolique fibrée  $M = S \times [0, 1]/(x, 0) \sim (\phi x, 1)$  (où  $\phi$  est un difféomorphisme pseudo-Anosov de la surface hyperbolique  $S$ ) qui possède alors un revêtement cyclique infini  $S \times \mathbb{R}$  dont la monodromie est un groupe de surface doublement dégénéré. Il existe aussi des exemples nettement plus compliqués donnant des groupes qui ne sont pas contenus dans des réseaux



de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  (qui apparaissent d'ailleurs comme limites des exemples précédents). Ces derniers sont construits dans [2, Theorem 12.8].

Il existe, en toute dimension, des sous-groupes aléatoires invariants supportés sur des groupes de rang infini. Un exemple simple est donné par les revêtements cycliques infinis de variétés de volume fini. Des exemples plus complexes (contenant en particulier une quantité non-dénombrable de types topologiques) seront présentés ci-dessous (cf. 3.1.3).

On peut complètement caractériser les types topologiques des surfaces apparaissant dans des IRS de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  par le résultat suivant, dont une preuve est donnée dans l'appendice A (écrit avec I. Biringer).

**THÉORÈME 3.3.** — *Soit  $\mu$  un IRS ergodique, sans atomes de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ . Alors il existe une surface  $S_\mu$  telle que pour  $\mu$ -presque tout  $\Lambda$  la surface  $\Lambda \backslash \mathbb{H}^2$  soit homéomorphe à  $S_\mu$ .*

*De plus si  $S_\mu$  n'est pas de type topologique fini alors elle est homéomorphe à l'une des dix surfaces suivantes : le monstre du Loch Ness (plan auquel on a attaché une infinité d'anses), l'échelle de Jacob (double du précédent moins un disque), l'arbre de Cantor (sphère privée d'un sous-ensemble de Cantor) ou l'arbre de Cantor fleuri (le dernier avec une infinité d'anses attachées, chaque point du Cantor étant limite d'anses)—cf. la figure 3.1 pour les représentations standard de ces dernières—ou l'une de celles-ci, le cylindre ou le plan à laquelle on a ôté un sous-ensemble localement fini de points qui intersecte tous les voisinages de bouts.*

Il n'est pas dur de construire pour chacun de ces types un IRS de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  qui soit supporté sur des surfaces de ce type. On peut le faire par des revêtements de surfaces de volume fini<sup>(6)</sup>, ou par des décompositions en pantalons (éventuellement dégénérés) sur des graphes infinis (cf. [2, 12.1] pour cette dernière construction). On remarque que la géométrie des revêtements infinis de surfaces a été étudié par Rostislav Grigorchuk dans [23] (dans ce cas le théorème 3.3 est une conséquence immédiate de la classification des surfaces (rappelée dans l'appendice A) et de l'observation de Heinz Hopf que les groupes infinis ont un, deux ou un ensemble de Cantor de bouts).

Enfin, notons qu'au vu des liens entre les sous-groupes aléatoires invariants et les mesures harmoniques des feuilletages (cf. [3]) ce résultat peut être vu comme un analogue dans le premier cadre au théorème d'Etienne Ghys sur les feuilles génériques [22].

---

6. Par exemple le monstre du Loch Ness, l'échelle de Jacob et les arbres de Cantor correspondent respectivement à des revêtements abéliens libres de rang 1,  $\geq 2$  et libres non-abéliens d'une surface compacte que l'on peut remplacer par une surface à cusps pour obtenir les types restants.

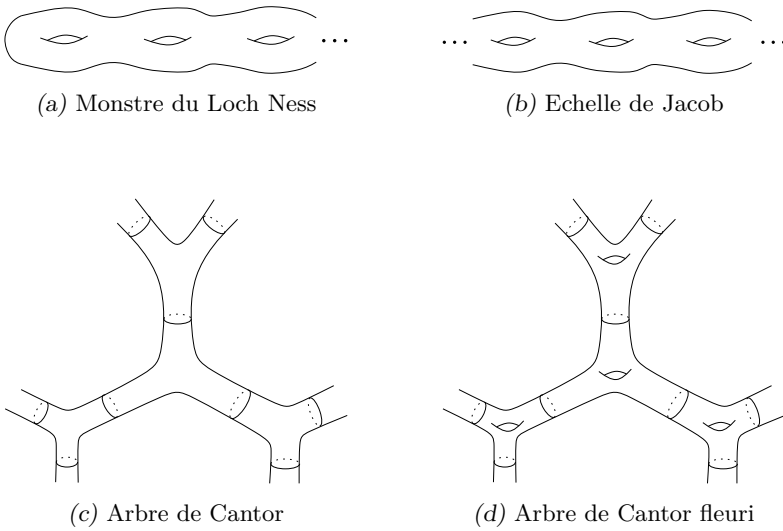


FIGURE 3.1

3.1.3. Dimensions supérieures

Comme pour la construction de variétés non-arithmétiques, en dimensions plus grandes on ne dispose d’aucune approche systématique. On peut cependant construire des exemples d’IRS ergodiques ‘exotiques’ (qui ne sont pas induits par un IRS d’un réseau) en toute dimension comme suit ; les détails sont donnés dans [2, Section 13].

Soit  $d \geq 3$  ; on choisit deux  $d$ -variétés hyperboliques compactes  $N_0, N_1$  ayant chacune un bord totalement géodésique, composé de deux copies d’une variété hyperbolique  $\Sigma$  de dimension  $d-1$ . Pour une suite  $\alpha \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  on note  $N_\alpha$  la variété hyperbolique complète de volume infini obtenue en recollant des copies de  $N_0, N_1$  de la manière indiquée par  $\alpha$ . Plus précisément, on suppose que l’on a choisi une identification des bords de  $N_0$  et  $N_1$ , et on note  $i_a^\pm$  les inclusions  $\sigma \rightarrow N_a$  ; on a alors :

$$N_\alpha = \left( \bigsqcup_{i \in \mathbb{Z}} N_{\alpha_i} \times \{i\} \right) / (i_{\alpha_i}^+ x, i) \sim (i_{\alpha_{i+1}}^- x, i+1) \quad (i \in \mathbb{Z}, x \in \Sigma).$$

Si on prend maintenant n’importe quelle mesure de probabilité  $\nu$  sur  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  on obtient un sous-groupe aléatoire  $\mu_\nu$  de  $SO(d, 1)$ , obtenu en choisissant selon la mesure  $G$ -invariante un repère aléatoire dans  $N_{\alpha_0} \times \{0\} \subset N_\alpha$  où

$\alpha$  est choisie aléatoirement suivant la loi  $\nu'$  sur  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  définie par :

$$\nu'(A) = \frac{\int_A \text{vol}(N_{\alpha_0}) d\nu(\alpha)}{\int_{\{0,1\}^{\mathbb{Z}}} \text{vol}(N_{\alpha_0}) d\nu(\alpha)}.$$

Si la mesure originale  $\nu$  est invariante par le décalage alors  $\mu_\nu$  est invariant par conjugaison, et si de plus  $\nu$  est ergodique alors  $\mu_\nu$  l'est aussi. Dans le cas où  $\nu$  est la mesure invariante supportée sur l'orbite par décalage d'une suite périodique  $\alpha$  il est clair que  $\mu_\nu$  est l'IRS induit correspondant au revêtement cyclique infini de  $N_\alpha$  sur la variété compacte obtenue en quotientant par la puissance du décalage correspondant à la période. Dans les cas restants on obtient bien de nouveaux IRS, comme montré par le résultat suivant.

**THÉORÈME 3.4.** — *Soit  $n \geq 3$ , il existe alors un choix de  $N_0$  et  $N_1$  telles que pour une suite  $\alpha \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  non-périodique la variété  $N_\alpha$  ne soit un revêtement d'aucune variété de volume fini. En particulier, si la mesure invariante ergodique  $\nu$  n'est pas supportée sur une orbite périodique alors l'IRS ergodique  $\mu_\nu$  ne peut pas être induit depuis un réseau de  $\text{SO}(d, 1)$ .*

Le choix de  $N_0, N_1$  utilisé dans la preuve de ce théorème est inspiré par la construction de variétés non-arithmétiques par Gromov et Piatetski-Shapiro [24].

## 3.2. Surfaces aléatoires

### 3.2.1. Weil–Petersson

L'espace de modules  $\mathcal{M}_g$  des structures hyperboliques à isométrie près sur une surface de genre  $g$  est muni d'une mesure Borélienne  $\nu_{\text{wp}}$ , dite de Weil–Petersson. La masse totale est finie, et on notera  $\mu_{\text{wp}}$  la mesure de probabilité associée. Le résultat suivant est démontré par Maryam Mirzakhani dans [31, 4.4].

**THÉORÈME 3.5 (Mirzakhani).** — *Il existe une constante  $C > 1$  telle que pour tout  $g \geq 2$  on ait :*

$$\mu_{\text{wp}} \left( X \in \mathcal{M}_g : \text{vol}(X_{\leq \log(g)/6}) \leq C^{-1} g^{11/12} \log(g) \right) \geq 1 - Cg^{-1/4}.$$

## 3.2.2. Surfaces de Bélyi aléatoires

Un autre exemple intéressant de modèle aléatoire est défini et étudié par Robert Brooks et Eran Makover dans [13]. Une surface de Bélyi est la compactification conforme d'une surface arithmétique non-compacte : on part d'un revêtement  $S$  de la surface modulaire  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}^2$ , que l'on munit de sa structure conforme. La surface non-compacte  $S$  est difféomorphe à une surface compacte  $S_C$  à laquelle on ôte un nombre fini de points ; de plus la structure conforme sur  $S$  induit une structure conforme sur  $S_C$ , et cette dernière est alors appelée une surface de Bélyi.

Il est facile de construire aléatoirement des surfaces arithmétiques non-compactes : si  $\mathcal{G}$  est un graphe trivalent on obtient une telle surface en recollant des triangles hyperboliques idéaux selon le schéma prescrit par  $\mathcal{G}$ , en identifiant les côtés sans paramètre de cisaillement (i.e. les projections des centres de gravités de deux triangles adjacents à un côté sur ce dernier coïncident)<sup>(7)</sup>. N'importe quel modèle de graphe aléatoire donne alors un modèle aléatoire pour les surfaces arithmétiques, et partant pour les surfaces de Bélyi obtenues en compactifiant ces dernières.

Le modèle que l'on retiendra est le même que dans [13]. Une surface de Bélyi aléatoire de complexité  $n$  est obtenue en tirant au hasard un graphe trivalent à  $2n$  sommets comme suit : on choisit, selon la loi uniforme, une bijection  $\{1, \dots, 6n\} \rightarrow \{1, \dots, 2n\} \times \{1, 2, 3\}$ ,  $i \mapsto (a_i, b_i)$  et on met une arête entre les sommets  $a_{2i-1}, a_{2i}$  pour  $i = 1, \dots, 3n$ . Un théorème de Béla Bollobás (cf. [13, Theorem 5.3]) montre que pour  $r, m$  donnés, la probabilité que le nombre de circuits de longueur  $r$  dans  $\mathcal{G}$  est inférieur à  $m$  tend vers 1 quand  $m$  tend vers l'infini (indépendamment de  $n$  assez grand). Par un résultat de comparaison dû à Brooks on peut en déduire le résultat suivant (la preuve complète est donnée dans l'annexe B).

**THÉORÈME 3.6.** — *Pour tous  $R, \varepsilon > 0$ , la probabilité que pour une surface de Bélyi aléatoire  $S_C$  de complexité  $n$  le volume de la partie  $R$ -mince  $(S_C)_{\leq R}$  soit supérieur à  $\varepsilon \mathrm{vol}(S)$  tend vers zéro quand  $n$  tend vers l'infini.*

Noter que l'espérance de la systole de  $S_C$  est bornée (cf. [37] qui calcule la limite exacte) et que celle du rayon maximal est d'ordre  $\log \mathrm{vol}(S_C)$  (cf. [13, Theorem 2.4]).

---

7. Pour lever certaines ambiguïtés il faut aussi munir  $\mathcal{G}$  d'un ordre cyclique des arêtes adjacentes à chacun de ses sommets, on réfère à [13] pour plus de détails.

### 3.2.3. Application aux petites valeurs propres

Nous commençons par les surfaces aléatoires déterminées par la loi de Weil–Petersson. Le théorème de Mirzakhani 3.5 conjointement aux résultats de [2] (rappelés en 2.4 ci-dessus) montrent qu’une surface aléatoire de Weil–Petersson générique a peu de petites (i.e. inférieures à  $1/4$ ) valeurs propres du Laplacien sur les fonctions. Rappelons que  $m(S, \lambda)$  désigne la multiplicité de  $\lambda \in [0, +\infty[$  comme valeur propre du Laplacien sur les fonctions de carré intégrable sur  $S$ . On a alors les deux résultats suivants.

- (i) Il existe une fonction  $f$  telle que  $f(g)/g \xrightarrow{g \rightarrow +\infty} 0$  et pour une surface aléatoire de Weil–Petersson de genre  $g$  on ait avec probabilité tendant vers 1 quand  $g \rightarrow +\infty$

$$\sum_{\lambda < 1/4} m(\lambda, S) \leq f(g).$$

- (ii) Il existe un  $C > 0$  et une fonction décroissante  $\alpha : [0, 1/4] \rightarrow [0, 1[$  (avec  $\alpha(1/4) = 0$ ) tels que pour tout  $\lambda \in [0, 1/4[$  et pour une surface aléatoire de Weil–Petersson de genre  $g$  on ait avec probabilité tendant vers 1 quand  $g \rightarrow +\infty$

$$m(\lambda, S) \leq Cg^{1-\alpha(\lambda)}.$$

Pour les surfaces de Bélyi aléatoires on obtient par le théorème 3.6 l’analogue de (i), en revanche l’étude des parties minces n’est pas assez fine pour obtenir un résultat équivalent à (ii).

Jean-Pierre Otal et Eulalio Rosas ont montré dans [35] que pour une surface de genre  $g$  il y a au plus  $2g - 1$  petites valeurs propres, et que cette borne est optimale si on considère toutes les surfaces de genre  $g$ . En revanche, le point (i) ci-dessus montre que la probabilité (pour la mesure de Weil–Petersson normalisée, ou pour le modèle de Brooks–Makover) qu’une surfaces de genre  $g$  ait autant de valeurs propres tend vers 0 quand  $g$  augmente. Le point (ii) est optimal (à l’échelle logarithmique) pour l’ensemble de toutes les surfaces : Bruno Colbois et Yves Colin de Verdière ont construit dans [16] des surfaces hyperboliques de genre  $g$  dont la première valeur propre est  $< 1/4$  et de multiplicité  $\gg \sqrt{g}$ .

## 3.3. Variétés hyperboliques de grand volume en dimensions $\geq 3$

### 3.3.1. Variétés arithmétiques

Un réseau arithmétique dans  $\mathrm{SO}(d, 1)$  est défini, à commensurabilité près, par un corps de nombres totalement réel  $F$  et un groupe algébrique  $\mathbf{G}/F$

tel que pour tous les plongements  $\sigma : F \rightarrow \mathbb{R}$  sauf un on ait  $\mathbf{G}^\sigma(\mathbb{R}) = \mathrm{SO}(d+1)$ , et pour le plongement  $\sigma_0$  restant  $\mathbf{G}^{\sigma_0}(\mathbb{R}) = \mathrm{SO}(d, 1)$ . Le groupe des points entiers  $\mathbf{G}(\mathcal{O}_F)$  (défini à commensurabilité près) est alors un réseau de  $\mathrm{SO}(d, 1) \times \mathrm{SO}(d+1)^{r-1}$  (où  $r = [F : \mathbb{Q}]$ ) et sa projection  $\Gamma$  dans  $G = \mathrm{SO}(d, 1)$  est un réseau dans ce dernier groupe. On dira que  $F$  est le corps de définition de  $\Gamma$  (ou de n'importe quel sous-groupe de  $G$  qui lui est commensurable). La conjecture suivante apparaît dans [39], et il semble que Peter Sarnak en ait énoncé une semblable.

**CONJECTURE 3.7.** — *Soit  $\Gamma_n$  une suite de réseaux arithmétiques sans torsion maximaux (et deux à deux non-conjugués) dans  $\mathrm{SO}(d, 1)$ . Alors la suite des orbifolds  $\Gamma_n \backslash \mathbb{H}^d$  est convergente au sens de Benjamini–Schramm vers  $\mathbb{H}^d$ .*

Une justification possible pour cette conjecture est donnée par un résultat de M. Abért et B. Virág (cf. [1]), qui déduit la convergence de l'existence d'un trou spectral optimal (i.e. de la conjecture de Ramanujan). En toute généralité cette conjecture apparaît comme difficile à démontrer (si seulement elle est vraie!), mais pour les petites dimensions on peut l'attaquer directement. En effet, pour  $d = 2, 3$  on a une description assez maniable des groupes  $\mathbf{G}$  permettant la construction de réseaux arithmétiques; celle-ci provient en dimension 2 de l'isomorphisme exceptionnel  $\mathrm{SO}(2, 1) \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  (resp.  $\mathrm{SO}(3, 1) \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  en dimension 3). Un réseau arithmétique  $\Gamma$  de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  est décrit à commensurabilité près par un corps de nombres  $F$  ayant exactement une place complexe, et une algèbre de quaternions  $A$  sur  $F$  ramifiée à toutes les places réelles de  $F$ . Le corps  $F$  est alors appelé corps des traces invariants de  $\Gamma$  (et peut effectivement être obtenu à partir des traces des carrés des éléments de  $\Gamma$ ). Les longueurs des géodésiques fermées du quotient  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^3$  sont alors décrites par certaines extensions quadratiques de  $F$ . On réfère à [30] et [39] pour une description plus précise de cette construction de réseaux arithmétiques.

Le résultat suivant est en grande partie issu de [39].

**THÉORÈME 3.8.** — *Soit  $p$  un nombre premier; si  $\Gamma_n$  est une suite de réseaux arithmétiques sans torsion maximaux de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  dont les corps des traces invariants sont tous de degré  $p$  alors la suite des variétés  $\Gamma_n \backslash \mathbb{H}^3$  est convergente au sens de Benjamini–Schramm vers  $\mathbb{H}^3$ .*

Dans le cas où le corps des traces invariants est fixé ce résultat est une conséquence de la description des réseaux maximaux et de la correspondance de Jacquet–Langlands et on n'a en fait pas besoin de l'hypothèse sur le degré du corps de traces (cf. la preuve de la proposition 6.7 dans [39]).

Dans le cas où les corps de traces sont deux à deux distincts on utilise le lemme suivant.

LEMME 3.9. — *Soient  $p$  un nombre premier et  $u$  une unité algébrique qui ne soit ni quadratique réelle, ni une racine de l'unité. Il n'existe qu'un nombre fini de corps de nombres  $F$  de degré  $p$ , ayant une seule place complexe et tels que  $E = F(u)$  soit une extension quadratique de  $F$  vérifiant  $|u|_{E/F} = 1$ .*

Via la correspondance entre géodésiques et extensions quadratiques on en déduit que si  $p > 2$  alors on obtient en fait par le lemme 3.9 que  $\text{inj}(\Gamma_n \backslash \mathbb{H}^3)$  tend vers l'infini quand le discriminant de  $F$  tend vers l'infini. Dans le cas restant où  $p = 2$  on utilise le fait que par le théorème 2.4 un groupe dans le support d'un IRS limite est soit trivial, soit Zariski dense ; comme dans le dernier cas il doit contenir un élément dont les valeurs propres ne sont pas totalement réelles, ce cas est impossible par le lemme 3.9.

Une preuve différente, reposant sur une description plus précise de la géométrie des groupes  $\text{SL}_2(\mathcal{O}_F)$  (utilisant en particulier un résultat de Shin Ohno et Takao Watanabe [34]) et la correspondance de Jacquet–Langlands est aussi donnée dans [39]. Elle ne fonctionne cependant que pour les degrés 2 et 3.

### 3.3.2. Topologie de la dimension trois

Rappelons les définitions de quelques invariants topologiques des variétés de dimension trois :

- Si  $H$  est un corps à anses de genre  $g$  (i.e. un voisinage régulier dans  $\mathbb{R}^3$  d'un bouquet de  $g$  cercles plongé) et  $\phi$  une classe d'homéomorphisme de  $\partial H$  alors  $H \cup_{\phi} H$  (où l'on identifie  $x \in \partial H$  dans la première copie de  $H$  avec  $\phi(x)$  dans la seconde) est une variété compacte sans bord de dimension 3 ; toute telle variété  $M$  admet une telle décomposition ('scindement de Heegard') et on définit le genre de Heegard de  $M$  comme le plus petit  $g$  telle que  $M$  ait un scindement en deux corps à anses de genre  $g$ .
- Si  $S$  est une surface et  $\phi$  une classe d'homéomorphisme de  $S$  alors la suspension  $S \times [0, 1] / \sim$  (où l'on fait l'identification  $(x, 0) \sim (\phi(x), 1)$ ) est une variété de dimension trois, que l'on appelle fibrée de fibre  $S$ . Beaucoup de variétés hyperboliques ne sont pas ainsi fibrées, mais c'est un théorème récent de Ian Agol [5] que tout variété hyperbolique compacte a un revêtement fini qui fibre. Si  $S$  est une surface immergée

dans  $M$  qui se relève dans un revêtement  $M'$  en une fibre  $S'$  d'une fibration de  $M'$ , on l'appelle fibre virtuelle dans  $M$ .

Ces propriétés ont des liens bien connus avec la géométrie, en particulier si une variété hyperbolique  $M$  admet un scindement de Heegard de genre  $g$  alors son rayon, d'injectivité global  $\text{inj}(M)$  est borné par une constante ne dépendant que de  $g$ ; de même, si  $M$  est fibrée avec une fibre de genre  $g$  on a une borne sur  $\text{inj}(M)$  que ne dépend que de  $g$ . On obtient ainsi le résultat suivant.

**PROPOSITION 3.10.** — *Si  $M_n$  est une suite de variétés hyperboliques compactes de dimension 3 qui soit convergente au sens de Benjamini-Schramm vers  $\mathbb{H}^3$  alors le genre de Heegard de  $M_n$  et le genre minimal d'une fibre virtuelle dans  $M_n$  tendent tous deux vers l'infini.*

En particulier, avec le théorème 3.8 on obtient le résultat suivant.

**COROLLAIRE.** — *Si  $g$  est fixé  $p$  est un nombre premier alors il n'existe qu'un nombre fini de réseaux arithmétiques maximaux (resp. de réseaux de congruence, ou de classes de commensurabilités de réseaux arithmétiques)  $\Gamma$  dont le corps de traces invariant est de degré  $p$  et tels que le genre de Heegard de  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^3$  (ou le genre minimal d'une fibre virtuelle dans  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^3$ ) soit égal à  $g$ .*

### 3.3.3. Variétés non-arithmétiques en dimensions supérieures

Soit  $d \geq 4$ ; c'est une conséquence bien connue de la rigidité locale des réseaux de  $\text{SO}(d, 1)$  (originellement observée par Hsien-Chung Wang) qu'étant donné un  $v > 0$  il n'existe qu'un nombre fini de variétés hyperboliques de dimension  $n$  et de volume plus petit que  $v$ . On peut noter  $\mathcal{M}_d(v)$  cet ensemble, on a alors

$$\log m(v) := \log |\mathcal{M}_d(v)| \asymp v \log(v).$$

Au vu des résultats en dimension 2 et en rang supérieur il est assez naturel de se poser, à la suite de Shmuel Weinberger (cf. [1]), la question suivante.

**QUESTION.** — *Etant donnés  $R, \varepsilon > 0$ , soit  $p(v)$  la proportion de  $M \in \mathcal{M}_d(v)$  telles que  $\text{vol}(M_{\leq R}) \leq \varepsilon \text{vol } M$ . Est-ce que  $p(v)/m(v)$  tend vers zéro quand  $v$  grandit ?*

La construction de variétés non-arithmétiques par Gromov et Piatetski-Shapiro [24] a été reprise dans [40] puis par Tsachik Gelander et Arie Levit dans [21]. On obtient ainsi des suites de groupes maximaux sans torsion



telles que les variétés associées aient un rayon maximal borné, et donc ne soient pas BS-convergentes vers le revêtement universel (leurs limites dans la topologie de Benjamini–Schramm sont les IRS construits en 3.1.3). Le résultat principal dans ce dernier article montre que pour  $R$  assez grand on a  $\log p(v) \asymp v \log(v)$ , ce qui inciterait à penser que la réponse à la question 3.3.3 pourrait être négative. Cependant notre méconnaissance quasi-complète du paysage global de l'ensemble des variétés hyperboliques en grande dimension ne saurait permettre la moindre certitude quand à ce sujet.

## Annexe A. Topologie des surfaces aléatoires unimodulaires (par I. Biringer et J. Raimbault)

On donne ici la démonstration du théorème 3.3.

### A.1. Classification topologique des surfaces

Commençons par rappeler la classification topologique des surfaces de type infini. On rappelle que l'espace  $\mathcal{E}(S)$  des bouts de  $S$  est défini comme la limite inductive des complémentaires des sous-surfaces compactes de  $S$ <sup>(8)</sup>. C'est un espace compact totalement discontinu. Le *genre* (possiblement infini) d'une surface  $S$  est le nombre maximum de courbes simples non séparantes, deux à deux disjointes et non isotopes, sur  $S$ . Le genre d'un bout  $E$  de  $S$  est le minimum des genres des sous-surfaces  $S'$  de  $S$  contenant  $E$ ; il ne peut être égal qu'à zéro ou à l'infini. Le théorème suivant est dû à Béla Kerékjártó, une démonstration complète en est donnée par Ian Richards dans [41].

**THÉORÈME A.1** (Kerékjártó, Richards). — *Deux surfaces topologiques orientables  $S$  et  $S'$  sont homéomorphes si et seulement si elles ont même genre, et s'il existe un homéomorphisme  $\mathcal{E}(S) \rightarrow \mathcal{E}(S')$  respectant les genres.*

Un bout est dit *cuspidal* s'il est de genre 0 et isolé dans  $\mathcal{E}(S)$ ; vu que dans une surface hyperbolique un tel bout est un cusp ou un entonnoir et que le second cas est impossible par le théorème 2.5 on a le lemme suivant, qui justifie cette appellation.

8. En termes plus intelligibles, étant donnée une suite  $K_n$  de sous-surfaces compactes de  $S$  avec  $K_n \subset K_{n+1}$  et  $\bigcup_n K_n = S$ , un bout de  $S$  est déterminé par une suite  $E_n$ , où chaque  $E_n$  est une composante connexe (forcément non-bornée) du complémentaire de  $K_n$  avec  $E_{n+1} \subset E_n$ .

LEMME A.2. — *Si  $\nu$  est un IRS sans atome de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  alors tout bout isolé de genre 0 de  $S$  est un cusp.*

On notera  $\mathcal{E}_{\mathrm{nc}}(S)$  l'ensemble des bouts non-cuspidaux de  $S$ , qui est un sous-espace fermé du compact  $\mathcal{E}(S)$ . Le résultat que nous démontrerons plus loin est le suivant.

THÉORÈME A.3. — *Soit  $\nu$  un sous-groupe aléatoire invariant de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ . Alors pour  $\nu$ -presque tout  $\Gamma$ , si la surface  $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}^2$  n'est pas de volume fini elle vérifie les propriétés suivantes :*

- (i) *Si  $|\mathcal{E}_{\mathrm{nc}}(S)| > 2$  alors  $\mathcal{E}_{\mathrm{nc}}(S)$  est un ensemble de Cantor ;*
- (ii) *Si  $S$  a un bout de genre 0 alors  $S$  elle-même est de genre 0 ;*
- (iii) *Si  $S$  a un bout cuspidal alors les bouts cuspidaux sont denses dans  $\mathcal{E}(S)$ .*

Montrons comment on en déduit le théorème 3.3 : soit  $\nu$  un IRS ergodique de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ . Les conditions (i), (ii) et (iii) ci-dessus déterminent d'après la classification (théorème A.1) exactement douze types topologiques ; en particulier (comme il n'y a qu'une quantité dénombrable de types topologiques finis) le type topologique de  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2$  appartient presque sûrement à un ensemble dénombrable. Vu que l'ensemble des  $\Gamma$  tels que  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2$  ait un type topologique donné est un borélien invariant par  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  il suit alors de l'ergodicité de  $\nu$  qu'une seule surface peut être réalisée comme  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2$  avec une probabilité non nulle. Il reste à voir que les types infinis sont bien ceux indiqués dans l'énoncé : deux des surfaces vérifiant (i), (ii) et (iii) ci-dessus sont le plan et le cylindre, qui n'apparaissent pas dans le support d'IRS non-atomiques de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ . On laisse au lecteur le soin de vérifier que les dix surfaces restantes sont bien celle apparaissant dans le théorème 3.3.

### A.2. Transport de masse

Le contenu de cette section vient de [10] (voir aussi [3]). Si  $\nu$  est un IRS de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  sans atome, on note  $\mu_\nu$  la mesure poussée en avant sur l'espace  $\mathcal{S}$  des surfaces hyperboliques pointées. On note  $\mathcal{S}_2$  l'espace des surfaces hyperboliques doublement pointées. Si  $f$  est une fonction borélienne sur  $\mathcal{S}_2$  l'égalité suivante est alors appelée principe de transport de masse :

$$(A.1) \quad \int_{\mathcal{S}} \int_{\mathcal{S}} f(S, p, q) dq d\mu_\nu(S, p) = \int_{\mathcal{S}} \int_{\mathcal{S}} f(S, p, q) dp d\mu_\nu(S, q).$$

### A.3. Démonstration du théorème A.3

On va démontrer successivement les points (i), (ii) et (iii) du théorème A.3 : leurs preuves sont similaires mais indépendantes. Pendant toute la démonstration on notera  $\mu$  une mesure unimodulaire sur  $\mathcal{S}$ , c'est à dire le poussé en avant sur  $\mathcal{S}$  d'un IRS via l'application naturelle  $\text{Sub}_G \rightarrow \mathcal{S}$ .

#### A.3.1. Bouts isolés

LEMME A.4. — *Pour  $\mu$ -presque toute  $(S, p)$ , si  $S$  a un bout non-cuspidal isolé des autres bouts non-cuspidaux alors elle a au plus deux bouts non-cuspidaux.*

*Démonstration.* — Supposons que  $S$  ait un bout non-cuspidal isolé des autres avec une  $\mu$ -probabilité  $> 0$ ; il existe alors un  $r > 0$  tel que, avec  $\mu$ -probabilité  $a > 0$ ,  $S - B_S(p, R)$  ait une composante connexe qui ait exactement un bout non-cuspidal : on fixe pour la suite un tel  $r$ . Soit  $f$  la fonction caractéristique du sous-ensemble  $E$  de  $\mathcal{S}_2$  constitué des  $(S, p, q)$  telles que  $S - B - S(p, r)$  ait au moins trois composantes connexes de volume infini, que  $q$  soit contenu dans l'une d'elles, et que cette dernière n'ait de plus qu'un seul bout non-cuspidal. On prouvera plus bas que cet ensemble est borélien, ce qui permet alors d'obtenir une contradiction via le principe de transport de masse comme suit : si l'on fixe  $(S, p, q) \in E$  alors l'ensemble des  $q' \in S$  tels que  $f(S, p, q') = 1$  est de volume infini (puisqu'il contient au moins une composante connexe de volume infini de  $S - B_S(p, r)$ , celle de  $q$ ). On a donc

$$\int_S \int_S f(S, p, q) dq d\mu(S, p) \geq a \times \infty = \infty.$$

Mais si l'on considère l'ensemble des  $p' \in S$  tels que  $f(S, p', q) = 1$  est de volume inférieur à celui d'une boule de rayon  $2r$  dans  $\mathbb{H}^2$  : en effet, si  $d(p, p') > 2r$  alors soit  $B_S(p', r)$  est contenue dans la même composante connexe de  $S - B_S(p, R)$  que  $q$ , auquel cas  $S - B_S(p', r)$  a au plus deux composantes connexes de volume infini, soit il est contenu dans une autre, auquel cas  $q$  est relié dans  $S - B_S(p', R)$  à l'une des composantes de volume infini de  $S - B_S(p, r)$ , et sa composante dans  $S - B_S(p', r)$  a donc au moins deux bouts non-cuspidaux. On a donc

$$\int_S \int_S f(S, p, q) dp d\mu(S, q) \leq \text{vol } B_{\mathbb{H}^2}(2r) < \infty,$$

ce qui avec l'égalité obtenue précédemment nie (A.1).

Il reste à prouver que l'ensemble  $E$  est bien un ensemble borélien. On a  $E = E_1 \cap E_2$  où  $E_1$  est l'ensemble des  $(S, p, q)$  telles que  $S - B_S(p, r)$  ait au moins trois composantes connexes de volume infini, et  $E_2$  l'ensemble des  $(S, p, q)$  telles que  $q$  soit dans une composante connexe de  $S - B_S(p, r)$  ayant exactement un bout non-cuspidal. Montrons que  $E_1$  est un borélien : si on fixe un  $V > 0$ , l'ensemble  $U_R$  des  $(S, p)$  telles que  $S - B_S(p, r)$  ait au moins trois composantes connexes de volume  $> V$  est ouvert dans le fermé des  $(S, p)$  telles que  $S - B_S(p, r)$  ait au moins trois composantes connexes, et comme  $E_1 = \bigcap_{V \in \mathbb{N}} U_R$  ce dernier est bien borélien. De la même manière, on a  $E_2 = \bigcap_{R \in \mathbb{N}} W_R$  où  $W_R$  est l'ensemble ouvert des  $(S, p, q)$  tels que  $q$  appartienne à une composante  $C$  de  $S - B_S(p, r)$  de volume infini telle que  $C - B_S(p, R)$  ait au plus une composante de volume infini, et il suit que  $E_2$  aussi est borélien.  $\square$

### A.3.2. Genre

LEMME A.5. — *Pour  $\mu$ -presque toute  $(S, p)$ , si  $S$  n'est pas de genre nul alors elle est de genre infini : en fait tout bout non-cuspidal de  $S$  est de genre infini.*

*Démonstration.* — La preuve est similaire à celle du lemme précédent : supposons qu'avec  $\mu$ -probabilité  $> 0$  la surface  $S$  soit de genre non nul, et ait un bout non-cuspidal de genre nul alors il existe un  $r > 0$  tel qu'avec une  $\mu$ -probabilité  $> 0$  la sous-surface  $B_S(p, r)$  soit de genre non nul et l'une des composantes de volume infini de  $S - B_S(p, r)$  soit de genre nul. On définit l'ensemble  $E$  comme suit : on a  $(S, p, q) \in E$  si et seulement si  $B_S(p, r)$  ait genre  $> 0$  et  $q$  appartienne à une composante de volume infini et de genre nul de  $S - B_S(p, r)$ . Si  $f$  désigne la fonction caractéristique de  $E$ , de la même manière que ci-dessus si l'on prouve que  $f$  est borélienne il suit que le côté gauche de (A.1) appliquée à  $f$  est infini tandis que son côté droit est fini (en effet, si  $f(S, p, q) = 1$  et  $d(p, p') > 2r$  alors soit  $B_S(p', r)$  est contenue dans la même composante de  $S - B_S(p, r)$  que  $q$  et est de genre nul, ou est contenue dans une autre composante de  $S - B_S(p, r)$  et alors la composante de  $q$  dans  $S - B_S(p', r)$  contient  $B_S(p, r)$  et est donc de genre  $> 0$ ).

Il suffit donc de prouver que  $E$  est un ensemble borélien. La condition que  $B_S(p, r)$  contienne un lacet non-séparant définit un ensemble ouvert  $U$ , de même pour un  $V > 0$  celle que  $q$  soit dans une composante de volume  $> V$  de  $S - B_S(p, r)$  définit un ouvert  $W_V$ . Enfin, pour  $R > r$  la condition que  $q$  appartienne à une composante de  $B_S(p, R) - B_S(p, r)$  de genre nul

définit elle aussi un ouvert  $V_R$ . On a

$$E = U \cap \bigcap_{V \in \mathbb{N}} W_V \cap \bigcap_{R \in \mathbb{N}} V_R$$

et  $E$  est donc bien un borélien.  $\square$

### A.3.3. Bouts cuspidaux

LEMME A.6. — *Pour  $\mu$ -presque toute  $(S, p)$ , si  $S$  a un bout cuspidal alors les bouts cuspidaux de  $S$  sont denses dans  $\mathcal{E}(S)$ .*

*Démonstration.* — La preuve suit encore le même principe que les deux précédentes, cette fois en utilisant un ensemble  $E$  défini comme suit :  $(S, p, q) \in E$  si et seulement si :

- (i) la boule fermée  $\overline{B}_S(p, r)$  intersecte la partie  $\varepsilon$ -mince d'un cusp de  $S$  (où  $\varepsilon$  est plus petit que la constante de Margulis de  $\mathbb{H}^2$ ) ;
- (ii)  $S - B_S(p, r)$  a une composante connexe  $C$  de volume infini n'ayant aucun bout cuspidal et  $q \in C$

(ici  $r$  est choisi de telle sorte que les deux premières conditions sur  $(S, p)$  aient une  $\mu$ -probabilité positive).

On vérifiera plus bas que  $E$  est un borélien, et le côté gauche de (A.1) appliqué à sa fonction caractéristique  $f$  est clairement infini. Il reste à voir que le côté droit est fini : pour cela on fixe  $(S, p, q) \in E$ , et on montre que le volume des  $p'$  avec  $(S, p', q) \in E$  est fini, borné indépendamment de  $(S, p, q)$  : en effet, si  $d(p, p') > 2r$  on est dans l'un des trois cas suivants :

- $p'$  est dans le cusp de  $S - B_S(p, r)$  ;
- $B_S(p', r)$  est contenue dans la même composante  $C$  de  $S - B_S(p, r)$  que  $q$ , et comme celle-ci n'a pas de bout cuspidal,  $S - B_S(p', r)$  n'a pas de cusp parmi ses composantes connexes ;
- le cusp isolé par  $B_S(p, r)$  est dans la même composante connexe de  $S - B_S(p', r)$  que  $q$ .

Le seul cas où l'on peut éventuellement avoir  $(S, p', q) \in E$  est le premier, et il suit que

$$\text{vol}(p' : (S, p', q) \in E) \leq \text{vol } B_{\mathbb{H}^2}(2r) + V$$

où  $V$  est le volume de la partie  $\varepsilon$ -mince d'un cusp.

Montrons que  $E$  est un borélien : la condition (i) est fermée ; Pour un  $R > r$  fixé la condition que  $B_S(p, R) \cap C$  n'intersecte pas la partie  $\varepsilon$ -mince d'un cusp de  $S$  est ouverte (noter que la composante  $C$  de  $q$  dans  $S - B_S(p, r)$  est localement bien définie), et la condition (ii) est l'intersection de ces conditions pour  $R \in \mathbb{N}$ ,  $R > r$ .  $\square$

## Annexe B. Convergence des surfaces de Bélyi aléatoires

D'après le lemme 2.6 le théorème 3.6 est une conséquence immédiate du résultat suivant, où l'on notera :

$$N_R(M) = |\{\text{géodésiques de longueur} \leq R \text{ sur } M\}|$$

pour une variété riemannienne  $M$ .

PROPOSITION B.1. — *Soit  $S_C$  une surface de Bélyi aléatoire de complexité  $n$  et  $R > 0$ . Quand  $n \rightarrow +\infty$  elle satisfait avec une probabilité tendant vers 1 la propriété suivante :*

$$\frac{N_R(S_C)}{\text{vol } S_C} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Il faut d'abord démontrer quelques propriétés géométriques des surfaces aléatoires à cusps, que l'on déduit des résultats de Bollobás sur les graphes décrits dans [13]. On ignorera les problèmes liés à l'orientation cyclique autour des sommets (cf. [13, Section 4]) qui ne jouent pas de rôle dans les résultats que nous utilisons. Rappelons (cf. [13, Section 3]) qu'on dit qu'une surface hyperbolique  $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}^2$  a des cusps plongés de largeur  $\ell$  si on peut choisir un système  $\mathcal{B}$  d'horoboules disjointes autour des points fixes paraboliques de  $\Gamma$  qui soit  $\Gamma$ -invariant et tel que tout parabolique de  $\Gamma$  préservant une horoboule  $B \in \mathcal{B}$  déplace d'au moins  $\ell$  sur son bord.

LEMME B.2. — *Si  $\mathcal{G}$  est un graphe aléatoire suivant la loi de Bollobás (décrite en 3.2.2 et dans [13, Section 5]) et  $S$  la surface aléatoire modélisée sur  $\mathcal{G}$ , alors avec probabilité tendant vers 1 quand le nombre de sommets tend vers l'infini on a les propriétés suivantes :*

- (i) *Pour un  $\ell > 0$  fixé,  $S$  a des cusps plongés de largeur  $\ell$  ;*
- (ii) *Pour un  $R > 0$  fixé, le nombre de géodésiques fermées de longueur  $\leq R$  sur  $S$  est borné.*
- (iii) *Le nombre de cusps de  $S$  est un  $o(n)$ .*

*Démonstration.* — Le point (i) est un des résultats principaux de [13] (cf. leur théorème 2.1 et la section 6 de leur article).

Le point (ii) suit immédiatement des deux faits suivants :

- (a) *Pour un  $R \in \mathbb{N}$  donné le nombre de chemins de longueur  $R$  dans  $\mathcal{G}$  est borné avec probabilité tendant vers 1 quand  $n \rightarrow +\infty$  ;*
- (b) *On a un isomorphisme  $\phi : \pi_1(\mathcal{G}) \rightarrow \pi_1(S) \subset \text{PSL}_2(\mathbb{R})$  tel que si  $\phi(c)$  est hyperbolique alors  $\ell(\phi(c)) \geq k \log \ell(c)$  où  $k > 0$  ne dépend pas de  $S$  (tant que cette dernière est un revêtement de la surface modulaire).*

On rappelle que  $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  est dit hyperbolique si  $\ell(g) := \inf_{x \in \mathbb{H}^2} d(x, gx) > 0$ ; sur le côté droit  $\ell(c)$  désigne le nombre minimal d'arêtes de  $\mathcal{G}$  empruntées par un lacet représentant  $c$ . Le point (a) va suivre du fait que les variables aléatoires donnant le nombre de *circuits* d'une longueur donnée dans  $\mathcal{G}$  sont asymptotiquement des variables de Poisson indépendantes [11, 2.4] (voir aussi [13, Théorème 5.3]). Pour en déduire le résultat sur les chemins il suffit d'observer que si  $\mathcal{G}$  est un graphe trivalent quelconque, pour un  $R > 0$  donné un circuit de longueur  $\leq R$  n'est contenu que dans un nombre fini de chemins de longueur  $\leq R$ , et ce nombre ne dépend que de  $R$ . Le point (b) est une conséquence de ce que le plongement  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{H}^2$  donné par une application orbitale  $\gamma \mapsto \gamma x_0$  ait une distortion logarithmique (ceci suit facilement du fait que si l'on tronque les cusps on obtient une quasi-isométrie de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$  sur  $\mathbb{H}^2$  privé d'une union d'horoboules disjointes, et que la distortion de l'inclusion de cette dernière dans  $\mathbb{H}^2$  est logarithmique).

Enfin, le point (iii) dans l'énoncé est une conséquence du point (ii), du lemme 2.3 et du fait que dans toute suite de surfaces qui soit BS-convergente vers  $\mathbb{H}^2$  le nombre de cusps est négligeable par rapport au volume (vu que la contribution de la partie  $\varepsilon$ -mince d'un cusp ( $\varepsilon =$  constante de Margulis) au volume de la partie mince est la même pour tous). Notons que la distribution plus précise du nombre de cusps a fait l'objet de plusieurs travaux suivant [13] (citons par exemple [20]).  $\square$

Le résultat suivant est dû à Brooks [12, Lemma 3.1].

LEMME B.3 (Brooks). — *Il existe un  $\ell$  tel que si  $S$  est une surface hyperbolique ayant des cusps plongés de largeur  $\ell$  alors pour tout  $R > 0$  on a*

$$N_R(S_C) \leq N_{2R}(S).$$

Il ne reste plus qu'à déduire la proposition B.1 : tout d'abord on note que par le point (iii) du lemme B.2 on a  $\mathrm{vol}(S_C) \sim \mathrm{vol}(S)$  avec une probabilité tendant vers 1 : en effet, vu que  $S$  et  $S_C$  ont (par définition de la dernière) le même genre, notant  $h$  le nombre de cusps de  $S$  on a  $\mathrm{vol}(S) = \mathrm{vol}(S_C) + 2\pi h$  par le théorème de Gauss-Bonnet. Par le point (i) du même lemme on peut appliquer le lemme B.3 à  $S$  avec probabilité tendant vers 1. On a donc (pour  $n$  assez grand) avec probabilité tendant vers 1 la majoration

$$\frac{N_R(S_C)}{\mathrm{vol} S_C} \leq 2 \frac{N_{2R}(S)}{\mathrm{vol} S}$$

pour une surface de Bélyi de complexité  $n$ . La proposition B.1 suit alors du point (ii) du lemme B.2.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. ABERT, « Invariant random subgroups and their applications », Transparents d'un exposé à l'IHP, [http://www.renyi.hu/~abert/IRS\\_talk.pdf](http://www.renyi.hu/~abert/IRS_talk.pdf).
- [2] M. ABERT, N. BERGERON, I. BIRINGER, T. GELANDER, N. NIKOLOV, J. RAIMBAULT & I. SAMET, « On the growth of  $L^2$ -invariants for sequences of lattices in Lie groups », <http://arxiv.org/abs/1210.2961>.
- [3] M. ABÉRT & I. BIRINGER, « Invariant measures on the space of all Riemannian manifolds », preprint, 2014.
- [4] M. ABÉRT, Y. GLASNER & B. VIRÁG, « Kesten's theorem for invariant random subgroups », *Duke Math. J.* **163** (2014), n° 3, p. 465-488.
- [5] I. AGOL, « The virtual Haken conjecture », *Doc. Math.* **18** (2013), p. 1045-1087, With an appendix by Agol, Daniel Groves, and Jason Manning.
- [6] W. BALLMANN, M. GROMOV & V. SCHROEDER, *Manifolds of nonpositive curvature*, Progress in Mathematics, vol. 61, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1985, vi+263 pages.
- [7] M. BELOLIPETSKY, « Hyperbolic orbifolds of small volume », A paraître dans les actes de l'ICM 2014, Séoul, <http://arxiv.org/abs/1402.5394>.
- [8] I. BENJAMINI & O. SCHRAMM, « Recurrence of distributional limits of finite planar graphs », *Electron. J. Probab.* **6** (2001), p. no. 23, 13 pp. (electronic).
- [9] N. BERGERON & D. GABORIAU, « Asymptotique des nombres de Betti, invariants  $l^2$  et laminations », *Comment. Math. Helv.* **79** (2004), n° 2, p. 362-395.
- [10] I. BIRINGER & O. TAMUZ, « Unimodularity of Invariant Random Subgroups », <http://arxiv.org/abs/1402.1042>.
- [11] B. BOLLOBÁS, *Random graphs*, second éd., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 73, Cambridge University Press, Cambridge, 2001, xviii+498 pages.
- [12] R. BROOKS, « Platonic surfaces », *Comment. Math. Helv.* **74** (1999), n° 1, p. 156-170.
- [13] R. BROOKS & E. MAKOVER, « Random construction of Riemann surfaces », *J. Differential Geom.* **68** (2004), n° 1, p. 121-157.
- [14] C. CHABAUTY, « Limite d'ensembles et géométrie des nombres », *Bull. Soc. Math. France* **78** (1950), p. 143-151.
- [15] L. CLOZEL, « Démonstration de la conjecture  $\tau$  », *Invent. Math.* **151** (2003), n° 2, p. 297-328.
- [16] B. COLBOIS & Y. COLIN DE VERDIÈRE, « Sur la multiplicité de la première valeur propre d'une surface de Riemann à courbure constante », *Comment. Math. Helv.* **63** (1988), n° 2, p. 194-208.
- [17] H. DONNELLY, « On the spectrum of towers », *Proc. Amer. Math. Soc.* **87** (1983), n° 2, p. 322-329.
- [18] A. EISENMANN & Y. GLASNER, « Generic IRS in free groups, after Bowen », <http://arxiv.org/abs/1406.1261>.
- [19] M. FARBER, « Geometry of growth : approximation theorems for  $L^2$  invariants », *Math. Ann.* **311** (1998), n° 2, p. 335-375.



- [20] A. GAMBURD & E. MAKOVER, « On the genus of a random Riemann surface », in *Complex manifolds and hyperbolic geometry (Guanajuato, 2001)*, Contemp. Math., vol. 311, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, p. 133-140.
- [21] T. GELANDER & A. LEVIT, « Counting commensurability classes of hyperbolic manifolds », *Geom. Funct. Anal.* **24** (2014), n° 5, p. 1431-1447.
- [22] É. GHYS, « Topologie des feuilles génériques », *Ann. of Math. (2)* **141** (1995), n° 2, p. 387-422.
- [23] R. I. GRIGORCHUK, « Topological and metric types of surfaces that regularly cover a closed surface », *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **53** (1989), n° 3, p. 498-536, 671.
- [24] M. GROMOV & I. PIATETSKI-SHAPIRO, « Nonarithmetic groups in Lobachevsky spaces », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **66** (1988), p. 93-103.
- [25] M. GROMOV, *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Progress in Mathematics, vol. 152, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1999, Based on the 1981 French original [ MR0682063 (85e :53051)], With appendices by M. Katz, P. Pansu and S. Semmes, Translated from the French by Sean Michael Bates, xx+585 pages.
- [26] D. KAZHDAN, « Some applications of the Weil representation », *J. Analyse Mat.* **32** (1977), p. 235-248.
- [27] J.-S. LI & J. J. MILLSON, « On the first Betti number of a hyperbolic manifold with an arithmetic fundamental group », *Duke Math. J.* **71** (1993), n° 2, p. 365-401.
- [28] A. LUBOTZKY, « Free quotients and the first Betti number of some hyperbolic manifolds », *Transform. Groups* **1** (1996), n° 1-2, p. 71-82.
- [29] A. LUBOTZKY & D. SEGAL, *Subgroup growth*, Progress in Mathematics, vol. 212, Birkhäuser Verlag, Basel, 2003, xxii+453 pages.
- [30] C. MACLACHLAN & A. W. REID, *The arithmetic of hyperbolic 3-manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 219, Springer-Verlag, New York, 2003, xiv+463 pages.
- [31] M. MIRZAKHANI, « Growth of Weil-Petersson volumes and random hyperbolic surfaces of large genus », *J. Differential Geom.* **94** (2013), n° 2, p. 267-300.
- [32] H. NAMAZI, P. PANKKA & J. SOUTO, « Distributional limits of Riemannian manifolds and graphs with sublinear genus growth », *Geom. Funct. Anal.* **24** (2014), n° 1, p. 322-359.
- [33] A. NEVO & R. J. ZIMMER, « A generalization of the intermediate factors theorem », *J. Anal. Math.* **86** (2002), p. 93-104.
- [34] S. OHNO & T. WATANABE, « Estimates of Hermite constants for algebraic number fields », *Comment. Math. Univ. St. Paul.* **50** (2001), n° 1, p. 53-63.
- [35] J.-P. OTAL & E. ROSAS, « Pour toute surface hyperbolique de genre  $g$ ,  $\lambda_{2g-2} > 1/4$  », *Duke Math. J.* **150** (2009), n° 1, p. 101-115.
- [36] P. PETERSEN, *Riemannian geometry*, second éd., Graduate Texts in Mathematics, vol. 171, Springer, New York, 2006, xvi+401 pages.
- [37] B. PETRI, « Random regular graphs and the systole of a random surface », <http://arxiv.org/abs/1311.5140>.
- [38] J. RAIMBAULT, « Analytic, Reidemeister and homological torsion for congruence three-manifolds », <http://arxiv.org/abs/1307.2845>.
- [39] ———, « On the convergence of arithmetic orbifolds », <http://arxiv.org/abs/1311.5375>.
- [40] ———, « A note on maximal lattice growth in  $SO(1, n)$  », *Int. Math. Res. Not.* **2013** (2013), n° 16, p. 3722-3731.

- [41] I. RICHARDS, « On the classification of noncompact surfaces », *Trans. Amer. Math. Soc.* **106** (1963), p. 259-269.
- [42] J. D. ROGAWSKI, *Automorphic representations of unitary groups in three variables*, Annals of Mathematics Studies, vol. 123, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1990, xii+259 pages.
- [43] G. STUCK & R. J. ZIMMER, « Stabilizers for ergodic actions of higher rank semi-simple groups », *Ann. of Math. (2)* **139** (1994), n° 3, p. 723-747.
- [44] M. E. TAYLOR, *Partial differential equations I. Basic theory*, second éd., Applied Mathematical Sciences, vol. 115, Springer, New York, 2011, xxii+654 pages.
- [45] D. WITTE MORRIS, « Introduction to Arithmetic Groups », <http://arxiv.org/abs/math/0106063>.

Jean RAIMBAULT  
Institut de Mathématiques de Toulouse  
UMR 5219 Université de Toulouse  
CNRS, UPS IMT  
F-31062 Toulouse Cedex 9 (France)  
Jean.Raimbault@math.univ-toulouse.fr