

Institut Fourier — Université de Grenoble I

Actes du séminaire de
**Théorie spectrale
et géométrie**

Guillaume BULTEAU

Géométrie systolique et technique de régularisation

Volume 31 (2012-2014), p. 1-41.

<http://tsg.cedram.org/item?id=TSG_2012-2014__31__1__0>

© Institut Fourier, 2012-2014, tous droits réservés.

L'accès aux articles du Séminaire de théorie spectrale et géométrie (<http://tsg.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://tsg.cedram.org/legal/>).

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques*

<http://www.cedram.org/>

GÉOMÉTRIE SYSTOLIQUE ET TECHNIQUE DE RÉGULARISATION

Guillaume Bulteau

RÉSUMÉ. — L'objectif de ce texte est de présenter la notion de systole d'une variété riemannienne et de faire un survol de la géométrie systolique. On illustrera aussi une technique fondamentale, appelée technique de régularisation, qui est à la base de plusieurs résultats essentiels de géométrie systolique. Je détaillerai comment cette technique permet d'estimer les nombres de Betti d'une variété asphérique (d'après Gromov), et comment elle permet de relier l'entropie volumique à la systole et au volume systolique d'une variété riemannienne (d'après Sabourau).

1. Introduction

Je vais dans un premier temps présenter la notion de systole d'une variété riemannienne fermée, en m'appuyant sur l'exemple du tore, puis faire un bref survol de certains thèmes de géométrie systolique.

1.1. Systole d'une variété

Considérons un tore plongé dans \mathbb{R}^3 . On s'intéresse au(x) plus petit(s) lacet(s) non contractile(s) de ce tore. La *systole* du tore est alors la longueur d'un tel lacet (dont je justifierai brièvement l'existence au paragraphe 1.2), que l'on appellera lacet systolique.

Mots-clés: Cycles géométriques, systole, volume systolique, espace d'Eilenberg-McLane, variété asphérique, nombres de Betti.

Crédits: Je remercie Benoît Kloeckner pour les remarques et suggestions qu'il a pu faire lors de mon passage au séminaire de théorie spectrale et de géométrie de Grenoble, ainsi qu'Ivan Babenko pour les nombreuses discussions sur ce sujet.

Ce travail est financé par l'ANR Finsler.

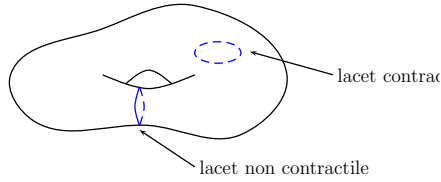


FIGURE 1.1. Un tore plongé dans \mathbb{R}^3 .

La figure 1.1 laisse penser, qu'à systole fixe, l'aire de ce tore est minorée : si l'on diminue trop l'aire un lacet non contractible plus petit apparaîtra.

Ce phénomène se retrouve clairement pour les tores plats rectangulaires obtenus par identification des côtés opposés d'un rectangle (voir 1.2).

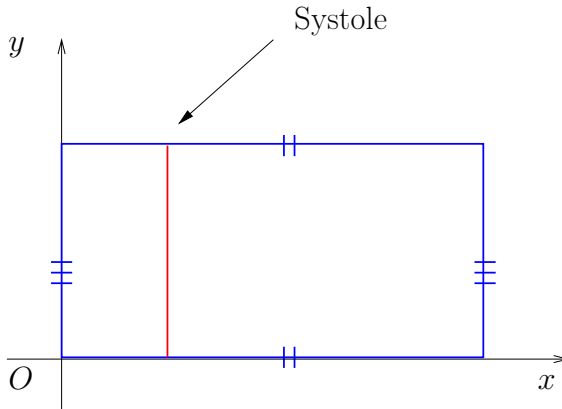


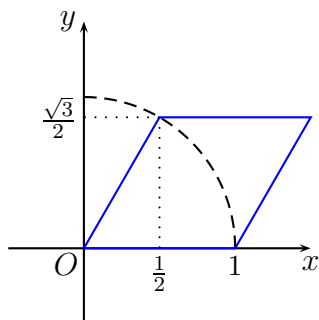
FIGURE 1.2. La systole contrôle l'aire d'un tore plat rectangulaire.

En fait, on a le résultat suivant, qui est à l'origine de la géométrie systolique.

THÉORÈME 1.1 (Loewner - 1949). — Soit M un tore de dimension 2. Pour toute métrique riemannienne g sur M , on a :

$$\text{aire}(M, g) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \text{syst}(M, g),$$

où $\text{syst}(M, g)$ désigne la longueur du plus petit lacet non contractile de M .

FIGURE 1.3. *Le tore hexagonal.*

Il y a égalité si et seulement si (M, g) est le tore plat hexagonal, obtenu en identifiant les côtés opposés du losange de la figure 1.3.

On peut trouver une preuve de ce résultat, qui repose sur le théorème de la représentation conforme, dans [8] ou [35].

1.2. Existence de la systole

On va justifier, dans ce paragraphe, l'existence de lacets systoliques. On se place, de manière plus générale, sur une variété riemannienne fermée (M, g) , non simplement connexe, de dimension $n \geq 1$.

Un lacet dans (M, g) sera une application $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, continue, telle que $c(0) = c(1)$. La systole de (M, g) , notée $\text{syst}(M, g)$, est la longueur du plus petit lacet non contractile dans M .

Notons ΩM l'ensemble des lacets dans M . On munit ΩM de la distance δ définie par :

$$\delta(\alpha, \beta) = \sup_{t \in [0, 1]} \text{dist}(\alpha(t), \beta(t)).$$

Une classe d'homotopie libre d'un lacet α est l'ensemble des lacets dans M homotopes à α . Ces classes d'homotopies libres sont fermées dans $(\Omega M, \delta)$. En effet deux lacets suffisamment proches dans ΩM sont homotopes ; ainsi les classes d'homotopies libres sont ouvertes, donc fermées, dans $(\Omega M, \delta)$.

Maintenant, en utilisant le théorème d'Ascoli, on va prouver qu'il existe, dans chaque classe d'homotopie libre, un lacet de longueur minimale. Soit α_0 un lacet dans M . On considère la borne inférieure ℓ de l'ensemble des longueurs des lacets de M homotopes à α_0 . On considère une suite minimisante (γ_n) de lacets de M homotopes à α_0 tels que :

$$\text{long}(\gamma_n) \leq \text{long}(\alpha_0) + \frac{1}{2^n}.$$

La longueur de ces courbes est uniformément bornée. Le théorème d'Ascoli assure, quitte à prendre une suite extraite, que la suite (γ_n) converge vers un lacet γ de M . Ce lacet γ est homotope à α_0 , puisque les classes d'homotopies libres sont fermées. Mais la fonction longueur est semi-continue inférieurement (voir [16], page 34), donc :

$$\text{long}(\gamma) \leq \liminf \text{long}(\gamma_n) = \ell.$$

Il en résulte que $\text{long}(\gamma) = \ell$.

Enfin, pour tout $L > 0$, le nombre de classes d'homotopie libre représentées par un lacet α de longueur inférieure à L est fini. Pour montrer cela, on raisonne par l'absurde. On suppose qu'il existe une suite (γ_n) dans ΩM telle que :

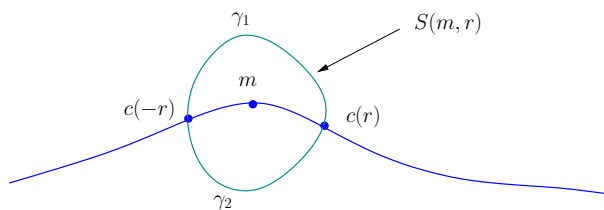
- $\text{long}(\gamma_n) \leq L$;
- Pour $p \neq q$ dans \mathbb{N} , les lacets γ_p et γ_q ne sont pas homotopes.

Toujours par le théorème d'Ascoli, il existe une extraction φ telle que la suite $(\gamma_{\varphi(n)})$ converge vers un lacet γ . Mais la classe d'homotopie libre de γ est ouverte dans ΩM : pour n assez grand tous les lacets $\gamma_{\varphi(n)}$ seront homotopes à γ , ce qui est contradictoire.

On peut ainsi considérer la plus petite longueur des lacets non contractiles de M . On peut montrer sans trop de peine que les lacets systolique de M , c'est à dire les lacets qui réalisent cette longueur, sont des géodésiques.

1.3. Le résultat de Burago et Hebda

Le contrôle de l'aire du tore par sa systole s'étend aux surfaces fermées de genre supérieur à 1, de manière assez élémentaire (voir [17] page 43 ou [31]).

FIGURE 1.4. La boule $\overline{B}(m, r)$.

THÉORÈME 1.2 (Burago/Hebda - 1980). — Toute surface fermée (M, g) de genre $h \geq 1$ contient une courbe fermée non contractile de longueur ℓ telle que $\text{aire}(M, g) \geq \frac{1}{2} \ell$.

Démonstration. — Soit c un lacet systolique de M , que l'on suppose paramétré par la longueur d'arc, et soit m un point de c . On suppose que $c(0) = m$. On note $\ell = \text{long}(c)$. Comme c est une géodésique, pour tout $t \in [-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}]$, on a $\text{dist}(m, c(t)) = t$. Si $B = B(m, \frac{\ell}{2})$ désigne la boule de centre m est de rayon $\frac{\ell}{2}$, montrons que l'on a :

$$(1.1) \quad \text{aire}(B(m, \frac{\ell}{2})) \geq \frac{\ell^2}{2}$$

Pour tout $r \in [0, \frac{\ell}{2}[$, on considère la boule fermée $\overline{B}(m, r)$, qui est, de par la définition de ℓ , contractile. Regardons maintenant son bord $S(m, r)$. On a :

$$S(m, r) = \gamma_1 \cup \gamma_2,$$

où γ_1 et γ_2 sont deux courbes qui relient les points $c(r)$ et $c(-r)$ (voir figure 1.4).

Si par exemple $\text{long}(\gamma_1) < 2r$, en recollant γ_1 et c , on obtient un lacet non contractile de longueur strictement inférieure à ℓ , ce qui est absurde. On a donc $\text{long}(\gamma_1) \geq 2r$ et, de même, $\text{long}(\gamma_2) \geq 2r$.

Ainsi :

$$\text{aire}(B) = \int_0^{\frac{\ell}{2}} \text{long} S(m, r) dr \geq 4 \int_0^{\frac{\ell}{2}} r dr = \frac{\ell^2}{2}.$$

Le théorème est donc prouvé, puisque $\text{aire}(M, g) \geq \text{aire}(B)$. \square

2. Un survol de la géométrie systolique

2.1. La géométrie systolique

Soit (M, g) une variété riemannienne fermée, non simplement connexe, de dimension $n \geq 1$. Nous avons vu que la *systole* de (M, g) , notée $\text{syst}(M, g)$, est la longueur du plus petit lacet non contractile dans M . Le *volume systolique* de M est alors :

$$\sigma(M) = \inf_g \frac{\text{vol}(M, g)}{\text{syst}(M, g)^n},$$

où g décrit l'ensemble des métriques riemanniennes lisses sur M .

Le thème principal de la géométrie systolique est l'étude du volume systolique. La question suivante est centrale :

Sous quelles conditions topologiques a-t-on $\sigma(M) > 0$ et quelle est sa valeur exacte ?

Une réponse satisfaisante a été donnée par Gromov à la première partie de la question en utilisant la notion de *variété essentielle*.

Soit M une variété compacte. Si M est orientable on note $A = \mathbb{Z}$ et, dans le cas contraire, $A = \mathbb{Z}_2$. Désignons par $[M]$ la classe fondamentale de M dans $H_n(M; A)$. Il existe alors une application

$$f : M \rightarrow K(\pi_1(M); A),$$

unique à homotopie près, où $K(\pi_1(M), 1)$ est le complexe d'Eilenberg-McLane. La variété M est alors dite *essentielle* lorsque l'image de $[M]$ par le morphisme induit en homologie

$$f_* : H_n(M; A) \rightarrow H_n(K(\pi, 1); A)$$

est une classe d'homologie non nulle dans $H_n(K(\pi, 1); A)$. Gromov a démontré (voir [25], page 3) le résultat fondamental suivant.

THÉORÈME 2.1 (Gromov). — *Il existe une constante $C_n > 0$ telle que pour toute variété compacte essentielle M de dimension n on ait :*

$$\sigma(M) \geq C_n.$$

Une preuve détaillée de ce résultat se trouve dans [28]. La catégorie des variétés essentielles recouvre notamment :

- (1) Les variétés asphériques i.e. les variétés dont les groupes d'homotopie d'ordre supérieur à 2 sont triviaux, en particulier les variétés à courbures négatives.
- (2) Les espaces projectifs $\mathbb{R}P^n$.

Babenko a démontré, dans le cas où M est orientable, qu'il est nécessaire que M soit essentielle pour avoir $\sigma(M) > 0$ (voir [2]). Dans le même article, il est montré que $\sigma(M)$ est un invariant du type d'homotopie de M : deux variétés ayant même type d'homotopie ont le même volume systolique.

Babenko a aussi démontré que, pour une variété essentielle orientable M de groupe fondamental π , le volume systolique $\sigma(M)$ ne dépend que de l'image h dans $H_n(K(\pi, 1); \mathbb{Z})$ de la classe fondamentale $[M]$ par l'application induite en homologie (voir [3]).

La réponse à la deuxième partie de la question, c'est à dire la détermination de la valeur exacte du volume systolique, est un problème difficile. Le volume systolique des variétés essentielles n'est connu que dans trois cas :

- le tore de dimension 2, pour lequel $\sigma(T^2) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (Loewner, non publié mais exposé dans [8]) ;
- le plan projectif $\sigma(\mathbb{R}P^2) = \frac{2}{\pi}$ (Pu, voir [39] et [9]) ;
- la bouteille de Klein $\sigma(K^2) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$ (Bavard, voir [7] et [43]).

D'autres questions concernant le volume systolique des variétés essentielles se posent :

- *La borne inférieure de la définition du volume systolique est-elle atteinte ?*
- *Dans l'affirmative, quelles sont les métriques optimales sur M ?*

Il s'agit encore de questions difficiles dont les réponses sont très partielles. La métrique optimale pour la bouteille de Klein présente certaines singularités. Gromov a démontré que le volume systolique des surfaces compactes

est atteint pour des métriques riemanniennes généralisées en un certain sens (voir [25], page 63).

Pour les surfaces orientables S_h de genre h , on dispose d'une estimée inférieure du volume systolique (voir [25] et [37]) qui est :

$$\sigma(S_h) \geq \frac{4\sqrt{h} + 27}{64}.$$

On connaît aussi partiellement le comportement asymptotique de $\sigma(S_h)$ (voir [36] et [18]) :

$$\pi \leq \limsup_{h \rightarrow +\infty} \sigma(S_h) \times \frac{\log^2 h}{h} \leq \frac{9\pi}{4}.$$

On peut définir la notion de volume systolique pour des objets plus généraux que des variétés. Par exemple si X est un espace de longueur compact, la notion de systole est parfaitement définie (voir [40]), et on peut alors utiliser le volume de Hausdorff pour définir le volume systolique (voir [27]).

2.2. Volume systolique des polyèdres

Si maintenant X est un polyèdre (espace topologique muni d'une triangulation) de groupe fondamental π , il existe une unique application à homotopie près

$$f : X \rightarrow K(\pi, 1)$$

telle que le morphisme de π induit par f soit égal à l'identité : c'est l'application classifiante. Un polyèdre compact X est dit n -essentiel lorsque l'application classifiante ne peut être déformée dans le squelette de dimension $n - 1$ de $K(\pi, 1)$.

On peut munir tout polyèdre de dimension n de métriques polyédrales. Une *métrique polyédrale* sur X est une famille de métrique riemannienne $(g_\sigma)_{\sigma \in \mathfrak{S}}$, où \mathfrak{S} est l'ensemble des simplexes de X , qui vérifie :

- Chaque g_σ est une métrique riemannienne lisse à l'intérieur de σ ;

— Dès que σ_1 et σ_2 sont dans \mathfrak{S} , on a l'égalité

$$g_{\sigma_1} |_{\sigma_1 \cap \sigma_2} = g_{\sigma_2} |_{\sigma_1 \cap \sigma_2} .$$

On désignera par une seule lettre g la famille $(g_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$ et on dira que g est une métrique riemannienne lisse par morceaux (ou polyédrale) sur X .

Le polyèdre X est alors un espace de longueur pour la distance induite par cette famille de métriques. La systole et le volume de X sont correctement définis. Le *volume systolique* de X est :

$$\sigma(X) = \inf_g \frac{\text{vol}(X, g)}{\text{syst}(X, g)^n},$$

où g décrit l'ensemble des métriques polyédrales sur X .

Le théorème 2.1 reste valable pour les polyèdres n -essentiels de dimension n ([25, Appendice 2]).

2.3. Aire systolique d'un groupe de présentation finie

Le volume systolique d'un complexe simplicial permet de définir l'aire systolique d'un groupe G de présentation finie, qui est :

$$\sigma(G) = \inf_P \sigma(P),$$

où P décrit l'ensemble des complexes simpliciaux de dimension inférieure ou égale à 2 et de groupe fondamental G .

Pour tout groupe non libre de présentation finie, on a (voir [41]) :

$$\sigma(G) \geq \frac{\pi}{16}.$$

Lorsque G est un groupe de présentation finie non trivial, sans facteur libre isomorphe à \mathbb{Z} , alors :

$$\sigma(G) \geq C \frac{b_1(G)}{\log^2(b_1(G) + 2)},$$

où $C > 0$ est une constante universelle, et $b_1(G)$ est le premier nombre de Betti de G ([6]).

L'aire systolique d'un groupe de présentation finie G est intimement liée à la notion de complexité simpliciale d'un groupe, qui est le nombre minimal

de simplexes de dimension 2 d'un complexe simplicial deux dimensionnel de groupe fondamental G (voir [5]).

2.4. Systole relative et volume systolique relatif

Soit π un groupe de présentation finie. Considérons un complexe simplicial X de dimension n , muni d'une métrique polyédrale g tel qu'il existe une application continue $f : X \rightarrow K(\pi, 1)$.

La systole relative de X , notée ici $\text{syst}(X, f, g)$, est la longueur du plus petit lacet c dans X tel que le lacet $f \circ c$ soit non contractile dans $K(\pi, 1)$. On peut alors définir le volume systolique relatif de V :

$$\sigma(X, f, g) = \frac{\text{vol}(X, g)}{\text{syst}(V, f, g)^n}.$$

Pour un polyèdre de dimension 2, lorsque l'application f ne se déforme pas dans le squelette de dimension 1 de $K(\pi, 1)$, on a (voir [34]) :

$$\frac{\text{aire}(X, g)}{\text{syst}(V, f, g)^2} \geq \frac{1}{8}.$$

2.5. Volume systolique d'une classe d'homologie

Soit π un groupe de présentation finie. On considère une classe d'homologie non nulle h dans $H_n(K(\pi, 1); \mathbb{Z})$. Cette classe peut être représentée par des pseudo-variétés V , compactes et orientables, de dimension n . Rappelons qu'une *pseudo-variété* de dimension n est un complexe simplicial fini K tel que :

- $\dim K = n$;
- Chaque simplexe dans K est face d'un simplexe de dimension n (homogénéité de la dimension) ;
- Chaque simplexe de dimension $n - 1$ est face d'exactly deux simplexes de dimension n (pas de bifurcation) ;
- Dès que σ et τ sont deux simplexes distincts de dimension n dans K , il existe une suite $\sigma_1 = \sigma, \dots, \sigma_p = \tau$ de simplexes de dimension n dans K tels que pour tout i dans $\{1, p - 1\}$ les simplexes σ_i et σ_{i+1} aient une face de dimension $n - 1$ commune (forte connexité).

Il est équivalent de dire qu'un complexe simplicial K est une pseudo-variété de dimension n lorsque K est de dimension n et lorsqu'il existe un sous-complexe $\Sigma \subset K$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

- $\dim \Sigma \leq n - 2$;
- $K \setminus \Sigma$ est une variété topologique de dimension n dense dans K ;
- L'espace $K \setminus \Sigma$ est connexe.

Lorsque V est une pseudo-variété et $f : V \rightarrow K(\pi, 1)$, on dit que (V, f) représente h lorsque $f_*[V] = h$, où

$$f_* : H_n(V; \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(K(\pi, 1); \mathbb{Z})$$

est le morphisme induit en homologie, et $[V]$ la classe fondamentale de V . La représentation de h par le couple (V, f) est dite *normale* lorsque le morphisme $f_* : \pi_1(V) \rightarrow \pi$ induit par f est un épimorphisme.

On peut munir chacune de ces pseudo-variétés d'une métrique polyédrale g . Le triplet (V, f, g) s'appelle un *cycle géométrique* représentant h . On définit alors le *volume systolique* de h par

$$\sigma(h) = \inf_{(V, f, g)} \sigma(V, f, g),$$

où (V, f, g) décrit l'ensemble des cycles géométriques qui représentent la classe d'homologie h .

D'après [25], pour toute classe d'homologie non nulle h dans $H_n(\pi; \mathbb{Z})$, on a $\sigma(h) > 0$.

Lorsque (V, f) est une représentation normale de h , on dit qu'elle est *admissible* lorsque tout élément de $\pi_1(V)$ peut être représenté par un lacet ne passant pas par le lieu singulier de V . Dans le cas où (V, f) est une représentation normale admissible de h on a :

$$\sigma(h) = \inf_g \sigma(V, f, g),$$

où g décrit l'ensemble des métriques polyédrales sur V (voir [4]). Soulignons d'ailleurs que h admet toujours une représentation normale admissible.

Cette présentation de la géométrie systolique est forcément incomplète. On pourra la compléter en consultant les articles [11], [20] et [26], ainsi que le livre [12]. Le livre [35] est un état des lieux en 2007. Deux autres références présentent des résultats fondamentaux de cette géométrie : [25], qui peut en être considéré comme le point de départ, et [27], qui est une version augmentée de [23].

Donnons enfin comme références, l'article [29], qui relie des idées essentielles de la géométrie systolique à d'autres branches des mathématiques, ainsi que l'article [1], qui fait le lien entre la géométrie systolique et la géométrie de contact.

3. La technique de régularisation

3.1. Cycle géométriques réguliers

Soient π un groupe de présentation finie et h une classe d'homologie dans $H_n(\pi; \mathbb{Z})$. Rappelons qu'un cycle géométrique représentant h est un triplet (V, f, g) où

- V est une pseudo-variété de dimension n , compactes et orientables ;
- $f : V \rightarrow K(\pi, 1)$ est une application continue telle, qu'au niveau de l'homologie, $f_*[V] = h$, où $[V]$ désigne la classe fondamentale de V .
- g est une métrique polyédrale sur V .

Les objets que l'on va utiliser dans la suite sont des cycles géométriques particuliers qui représentent une classe d'homologie entière non nulle dans $H_n(\pi; \mathbb{Z})$, dans lesquelles on dispose d'un contrôle du volume des petites boules. Ils sont définis par le théorème suivant.

THÉORÈME 3.1 (Gromov). — *Soient π un groupe de présentation finie et h une classe d'homologie entière non nulle dans $H_n(\pi; \mathbb{Z})$. Pour tout ε dans $]0, \frac{1}{2}\text{sys}(V, f, g)[$, il existe un cycle géométrique (V, f, g) représentant h tel que :*

$$(1) \quad \sigma(V, f, g) \leq \sigma(h) + \varepsilon.$$

(2) Pour $R \in [\varepsilon, \frac{1}{2} \text{syst}(V, f, g)]$, les boules $B(R)$ de rayon R dans V vérifient :

$$(3.1) \quad \text{vol}(B(R)) \geq A_n R^n,$$

pour une certaine constante universelle A_n , qui ne dépend que de la dimension de h .

Un tel cycle géométrique est dit ε -régulier.

On peut comparer ce résultat avec l'inégalité 1.1, page 5. Ce théorème, dont une démonstration exhaustive se trouve dans [15], est à la base de plusieurs résultats importants de géométrie systolique. La *technique de régularisation* consiste à utiliser ces cycles réguliers pour obtenir des informations topologiques sur une classe $h \in H_n(\pi; \mathbb{Z})$. Elle a permis notamment de relier le volume systolique d'une variété fermée asphérique à d'autres invariants homotopiques de cette variété.

Je présenterai dans le paragraphe 4 comment obtenir, d'après Gromov, une majoration des nombres de Betti d'une variété fermée asphérique en fonction de son volume systolique. Puis, je détaillerai, dans le paragraphe 5, la preuve d'un théorème de Sabourau, reliant le volume systolique et l'entropie volumique d'un cycle géométrique régulier, afin de souligner les idées essentielles de géométrie systolique qui y interviennent.

3.2. Premières illustrations de la technique de régularisation

Je vais donner ici quelques illustrations du théorème 3.1. Commençons par une situation élémentaire qui montre comment l'inégalité (3.1) sur le volume des boules permet de préciser la topologie des cycles géométriques réguliers.

Soit (V, f, g) un cycle ε -régulier qui représente une classe d'homologie non triviale dans $H_n(\pi; \mathbb{Z})$. Considérons un système maximal B_1, \dots, B_N de boules ouvertes disjointes de V de rayon $R_0 = \frac{1}{2} \text{syst}(V, f, g)$. Les boules concentriques $2B_1, \dots, 2B_N$ de rayon $2R_0$ recouvrent V . Appelons \mathcal{N} le nerf de ce recouvrement. Il s'agit du complexe simplicial construit de la manière suivante :

- Les sommets p_1, \dots, p_N de \mathcal{N} sont identifiés avec les boules du recouvrement ;
- Deux sommets p_i et p_j sont reliés par une arête lorsque $2B_i \cap 2B_j \neq \emptyset$;
- Pour $p \geq 2$ entier, les sommets p_{i_0}, \dots, p_{i_p} forment un simplexe de dimension p de \mathcal{N} lorsque :

$$2B_{i_0} \cap \dots \cap 2B_{i_p} \neq \emptyset.$$

On peut alors borner le nombre N_k de simplexes de dimension k de \mathcal{N} en fonction du volume systolique $\sigma(h)$ de la classe h . Par exemple, on a

$$\text{vol}(V, g) \geq \sum_{i=1}^{N_0} \text{vol}(B_i) \geq N_0 A_n R_0^n,$$

ce qui permet de borner le nombre de sommets N_0 de \mathcal{N} en fonction de $\sigma(h)$.

La première conséquence importante du théorème 3.1 concerne le volume systolique d'une classe d'homologie non nulle dans $H_n(\pi; \mathbb{Z})$, lorsque π est un groupe de présentation finie.

THÉORÈME 3.2. — *Soient π un groupe de présentation finie et $n \geq 1$. Il existe une constante $C_n > 0$, qui ne dépend que de n , telle que pour toute classe d'homologie non nulle h dans $H_n(\pi; \mathbb{Z})$ on ait :*

$$\sigma(h) \geq C_n.$$

Démonstration. — Soit $h \in H_n(\pi; \mathbb{Z})$. Fixons provisoirement $\varepsilon > 0$. Il existe alors, selon le théorème A, un cycle géométrique ε -régulier (V, f, g) qui représente la classe h . Soit $v \in V$. On a alors :

$$\text{vol}(V, g) \geq \text{vol}(B(v, \frac{1}{2}\text{syst}(V, f, g))) \geq \frac{A_n}{2^n} \text{syst}(V, f, g)^n.$$

Il en résulte que $\sigma(V, f, g) \geq \frac{A_n}{2^n}$. Ainsi :

$$\sigma(h) + \varepsilon \geq \frac{A_n}{2^n}.$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient le résultat souhaité, avec $C_n = \frac{A_n}{2^n}$. □

On peut alors en déduire une preuve de l'inégalité systolique de Gromov (théorème 2.1).

Démonstration. — Soit M une variété essentielle orientable de dimension n , de groupe fondamental π . Il existe une application $f : M \rightarrow K(\pi, 1)$, unique à homotopie près, telle que $f_*[M] = h$, où

$$f_* : H_n(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(\pi; \mathbb{Z})$$

est le morphisme induit en homologie. D'après le théorème 3.2, on a $\sigma(h) \geq C_n$, pour une constante universelle $C_n > 0$ qui ne dépend que de n . Mais (M, f) est une représentation normalisée admissible de h : selon [4], on a $\sigma(M) = \sigma(h)$. \square

Gromov utilise aussi le théorème 3.1 afin de relier des propriétés topologiques de h au volume systolique. Plus précisément, ces cycles réguliers permettent à Gromov d'obtenir des inégalités entre le volume systolique et deux invariants topologiques importants de la classe h , qui sont :

- La hauteur simpliciale $h_s(h)$ de $h \in H_m(\pi; \mathbb{Z})$, qui est le nombre minimal de simplexes de toute dimension d'un cycle géométrique qui représente h ;
- Le volume simplicial $\|h\|_\Delta$, défini comme l'infimum des sommes $\sum |r_i|$ sur toutes les représentations de h par des cycles singuliers réels $\sum r_i \sigma_i$.

Gromov a notamment obtenu les résultats suivants (voir [25], théorème 6.4.C" et théorème 6.4.D' et [26], paragraphe 3.C.3).

THÉORÈME 3.3 (Gromov). — *Soit π un groupe de présentation finie, $h \in H_m(\pi; \mathbb{Z})$, une classe d'homologie non nulle de dimension $m \geq 2$.*

- (1) *Il existe deux constantes positives C_m et C'_m , qui ne dépendent que de m , telles que :*

$$\sigma(h) \geq C_m \frac{h_s(h)}{\exp(C'_m \sqrt{\ln h_s(h)})}.$$

- (2) Il existe une constante positive C''_m qui ne dépend que de la dimension m telle que :

$$\sigma(h) \geq C''_m \frac{\|h\|_\Delta}{(\ln(2 + \|h\|_\Delta))^m}.$$

4. Nombres de Betti d'une variété asphérique

4.1. Introduction

Soient π un groupe de présentation finie et $h \in H_n(\pi; \mathbb{Z})$. La technique de régularisation permet de relier le nombre de simplexes d'un polyèdre particulier au volume systolique de h . Plus précisément, on va démontrer le théorème suivant (voir [25], page 72).

THÉORÈME 4.1 (Gromov). — Soient π un groupe de présentation finie, h une classe d'homologie non nulle dans $H_n(\pi; \mathbb{Z})$. Il existe un polyèdre \mathcal{P} et une application $g : \mathcal{P} \rightarrow K(\pi, 1)$ tels que :

- g induit un épimorphisme de groupes $g_* : \pi_1(\mathcal{P}) \rightarrow \pi_1(M)$;
- le nombre N_k de simplexes de dimension k de \mathcal{P} vérifie :

$$N_k \leq C_n \sigma(h) \exp(C'_n \sqrt{\log \sigma(h)}),$$

où C_n et C'_n sont deux constantes universelles qui ne dépendent que de n ;

- l'application induite en homologie par g envoie une certaine classe h' de $H_n(\mathcal{P}; \mathbb{Z})$ sur la classe h .

Dans tout ce paragraphe, $h \in H_n(\pi; \mathbb{Z})$ et (V, f, \mathcal{G}) désigne un cycle géométrique ε -régulier qui représente h , où $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2} \text{ syst}(V, f, \mathcal{G})]$. On a donc (voir théorème 3.1, page 12) $\sigma(V, f, \mathcal{G}) \leq (1 + \varepsilon)\sigma(h)$ et, pour tout R dans $[\varepsilon, \frac{1}{2} \text{ syst}(V, f, \mathcal{G})]$, les boules $B(R)$ de rayon R dans V vérifient :

$$\text{vol}(B(R)) \geq A_n R^n.$$

4.2. Nerf associé à un recouvrement particulier de V

On considère un recouvrement \mathcal{O} de V par des boules ouvertes $O_1 = B(v_1, R_1), \dots, O_N = B(v_N, R_N)$ telles que, pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, on ait :

$$R_i < \frac{1}{6} \text{syst}(V, f, \mathcal{G}).$$

On peut réaliser géométriquement \mathcal{P} dans \mathbb{R}^N de la manière suivante :

- (1) Pour $i \in \{1, \dots, N\}$, le sommet p_i qui correspond à O_i , est le point de \mathbb{R}^N dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf la i -ème qui est égale à 1.
- (2) Les sommets p_1, \dots, p_{m+1} forment un simplexe euclidien de dimension m lorsque :

$$O_1 \cap O_2 \cap \dots \cap O_{m+1} \neq \emptyset.$$

A ce recouvrement, on associe une partition de l'unité définie de la manière suivante. On part d'une famille $(\psi_i)_{1 \leq i \leq N}$ de fonctions $\psi_i : V \rightarrow \mathbb{R}$, continues, telle que, pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, la fonction ψ_i soit strictement positive sur O_i et nulle hors de O_i . Pour i dans $\{1, \dots, N\}$ on pose :

$$\phi_i = \frac{\psi_i}{\sum_{j=1}^N \psi_j}.$$

Chacune des fonctions ϕ_i est continue, à valeurs dans $[0, 1]$, strictement positive sur O_i , et on a :

$$\sum_{i=1}^N \phi_i = 1.$$

A cette partition de l'unité, on peut associer une fonction $p : V \rightarrow \mathcal{P}$ qui, à un point v de V , associe le point de coordonnées $(\phi_1(v), \dots, \phi_N(v))$ de \mathbb{R}^N . Elle est bien à valeurs dans \mathcal{P} . On peut aussi noter (voir par exemple [21], page 172) que $p^{-1}(\text{star}(p_i)) \subset O_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, où $\text{star}(p_i)$ désigne l'union de l'intérieur de tous les simplexes de P qui contiennent p_i .

Remarque 4.2. — Si on considère une autre partition de l'unité $\sum_{i=1}^N \bar{\varphi}_i = 1$ associée au recouvrement $\mathcal{O} = (O_i)_{1 \leq i \leq N}$ de V , la fonction associée \bar{p} est homotope à p . En effet, pour t dans $[0, 1]$ et $i \in \{1, \dots, N\}$, on pose : $H_i(t, \cdot) = (1-t)\varphi_i + t\bar{\varphi}_i$. Pour tout $t \in [0, 1]$, on obtient alors une partition de l'unité $\sum_{i=1}^N H_i(t, \cdot)$, d'où l'application $H(t, \cdot) = (1-t)p + t\bar{p}$, qui permet de réaliser une homotopie de p à \bar{p} .

Il existe alors une application naturelle de \mathcal{P} dans $K(\pi, 1)$.

LEMME 4.3. — *Avec les notations précédentes, il existe une application continue $g : \mathcal{P} \rightarrow K(\pi, 1)$ qui induit un épimorphisme au niveau des groupes fondamentaux telle que $g \circ p$ soit homotope à f , i.e. telle qu'à homotopie près, le diagramme suivant commute.*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & K(\pi, 1) \\ p \downarrow & \nearrow g & \\ \mathcal{P} & & \end{array}$$

Démonstration. — Pour $k \in \mathbb{N}$ on note \mathcal{P}_k le squelette de dimension k de \mathcal{P} . Commençons par définir une application $\Phi_1 : \mathcal{P}_1 \rightarrow V$ de la manière suivante :

- (1) Pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, on pose $\Phi_1(p_i) = v_i$, où, rappelons le, v_i est le centre de la boule O_i du recouvrement \mathcal{O} .
- (2) Lorsque p_i et p_j sont deux sommets de \mathcal{P} reliés par une arête $\gamma_{i,j} : [0, 1] \rightarrow \mathcal{P}$, on pose, pour tout t dans $[0, 1]$:

$$\Phi_1(\gamma_{i,j}(t)) = c_{i,j}(t),$$

où $c_{i,j} : [0, 1] \rightarrow V$ est un chemin minimisant de v_i à v_j .

On peut noter que l'application

$$p \circ \Phi_1 : \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}$$

est homotope à $\text{Id}_{\mathcal{P}_1}$ relativement à \mathcal{P}_0 . En effet, prenons p_i et p_j deux sommets de \mathcal{P} . Si $v \in \Phi_1([p_i, p_j])$, alors $p(v) \in \text{star}([p_i, p_j])$, où $\text{star}([p_i, p_j])$

est l'étoile de $[p_i, p_j]$. Il en résulte que l'application $p \circ \Phi_1 : [p_i, p_j] \rightarrow \mathcal{P}$ est homotope à l'identité de $[p_i, p_j]$ relativement à $\{p_i, p_j\}$.

Pour i et j distincts dans $\{1, \dots, N\}$ et t dans $[0, 1]$, posons :

$$g(\gamma_{i,j}(t)) = f \circ \Phi_1(\gamma_{i,j}(t)).$$

On définit ainsi une application $g : \mathcal{P}_1 \rightarrow K(\pi, 1)$ telle que $g = f \circ \Phi_1$. Si maintenant $\Delta = [p_i, p_j, p_k]$ est un simplexe de dimension 2 dans \mathcal{P} , son bord $\partial\Delta$ est un lacet c tel que :

$$\text{long}(\Phi_1(c)) < \text{syst}(V, f, \mathcal{G}).$$

Il en résulte que $g(\partial\Delta) = f(\Phi_1(\partial\Delta))$ est un lacet contractile dans $K(\pi, 1)$, ce qui permet de prolonger l'application g au squelette de dimension 2 de \mathcal{P} . Comme $K(\pi, 1)$ est asphérique, il n'y a plus d'obstruction à prolonger g à \mathcal{P} tout entier.

Il reste à démontrer que $g \circ p$ est homotope à f . Quitte à raffiner la structure simpliciale de V , on peut supposer que les centres des boules v_1, \dots, v_N sont des sommets de V , et que tout simplexe de dimension 1 de V est de longueur inférieure à $\frac{1}{3}\text{syst}(V, f, \mathcal{G})$. Comme $p \circ \Phi_1 : \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}$ est homotope à $\text{Id}_{\mathcal{P}_1}$ relativement à \mathcal{P}_0 , l'application

$$g \circ p : \text{Im}\Phi_1 \rightarrow K(\pi, 1)$$

est homotope à la restriction de f à $\text{Im}\Phi_1$. Il existe alors une homotopie $h_t : \text{Im}\Phi_1 \rightarrow K(\pi, 1)$ telle que $h_0 = f$ et $h_1 = g \circ p$. Chaque h_t se prolonge à $V_1 \cup \text{Im}\Phi_1$, où V_1 est le squelette de dimension 1 de V . Soit maintenant Δ un simplexe de dimension 2 de V . Son bord $\partial\Delta$ est un lacet dans V de longueur strictement inférieure à $\frac{1}{3}\text{syst}(V, f, \mathcal{G})$, donc $h_t(\partial\Delta)$ est contractile ce qui permet de prolonger h_t en une homotopie de f à $g \circ p$ sur le squelette de dimension 2 de V , et il n'y a plus d'obstruction à prolonger h_t en une homotopie de f à $g \circ p$ sur V tout entier.

Le fait que l'application $g_* : \pi_1(K) \rightarrow \pi$ soit un épimorphisme résulte du fait que l'on peut choisir un cycle (V, f, \mathcal{G}) qui est normalisé. \square

Remarque 4.4. — Le diagramme commutatif du lemme 4.3 induit alors un diagramme commutatif au niveau des groupes d'homologie, et on a

alors :

$$g_*(p_*[V]) = h,$$

où $[V]$ est la classe fondamentale de V .

4.3. Boules admissibles

On introduit ici la notion de boules admissibles (voir [25], théorème 5.3.B) du cycle géométrique ε -régulier (V, f, \mathcal{G}) . Cette notion est aussi utilisée dans [5].

DÉFINITION 4.5. — Soit $\alpha > 0$. Soient $R_0 = \frac{1}{12} \text{syst}(V, f, \mathcal{G})$ et ε, r, R des réels tels que $\varepsilon \leq r \leq R < R_0$. Pour $v \in V$, on dira que la boule $B(v, R)$ est (α, r) -admissible lorsque :

$$(1) \text{ vol}(B(v, 5R)) \leq \alpha \text{ vol}(B(v, R))$$

$$(2) \text{ Pour tout } R' \in [R, R_0], \text{ vol}(B(v, 5R')) \geq \alpha \text{ vol}(B(v, R')).$$

Une boule de rayon R_0 sera dite (α, r) -admissible lorsque $\text{vol}(B(v, 5R_0)) \leq \alpha \text{ vol}(B(v, R_0))$.

Avec le choix fait de R_0 , le volume d'une boule admissible est supérieure à $A_n R^n$. Mais on peut obtenir une borne inférieure du volume d'une boule (α, r) -admissible en fonction de R_0 et de α .

LEMME 4.6. — Soit $\alpha > 5^n$. Lorsque $B(v, R)$ est une boule (α, r) -admissible du cycle géométrique ε -régulier (V, f, \mathcal{G}) , on a :

$$(4.1) \quad \text{vol} B(v, R) \geq C_n(\alpha) R_0^n,$$

$$\text{où } C_n(\alpha) = 5^{-m_0(\alpha)n} A_n \text{ et } m_0(\alpha) = \frac{\log \text{vol}(V, \mathcal{G}) - n \log R_0 - \log A_n}{\log \alpha - n \log 5}$$

Démonstration du lemme 4.6. — Le cycle géométrique (V, f, \mathcal{G}) est ε -régulier, donc $\text{vol}(B(v, R)) \geq A_n R^n$. Soit m un entier tel que :

$$5^{-m} R_0 \leq R \leq 5^{-m+1} R_0.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \text{vol}(V, \mathcal{G}) &\geq \text{vol}(B(v, 5R_0)) \geq \alpha \text{vol}(B(v, R_0)) \geq \alpha^2 \text{vol}(B(v, 5^{-1}R_0)) \\ &\geq \alpha^3 \text{vol}(B(v, 5^{-2}R_0)) \geq \dots \geq \alpha^m \text{vol}(B(v, 5^{-m+1}R_0)) \\ &\geq \alpha^m \text{vol}(B(v, R)) \\ &\geq \alpha^m A_n R^n \end{aligned}$$

Ainsi $\text{vol}(V, \mathcal{G}) \geq \alpha^m A_n 5^{-mn} R_0^n$, donc :

$$\log \text{vol}(V, \mathcal{G}) - n \log R_0 - \log A_n \geq m(\log \alpha - n \log 5).$$

Comme $\log \alpha - n \log 5 > 0$, on obtient :

$$m \leq \frac{\log \text{vol}(V, \mathcal{G}) - n \log R_0 - \log A_n}{\log \alpha - n \log 5} = m_0(\alpha)$$

Il en résulte que $\text{vol}(B(v, R)) \geq A_n R^n \geq 5^{-mn} A_n R_0^n \geq 5^{-m_0(\alpha)n} A_n R_0^n$. □

On peut se poser naturellement la question de l'existence de boules admissibles selon la valeur de α . Il est clair que pour α grand, il y aura des boules admissibles centrées en tout point de V . Le lemme suivant précise un peu cela.

LEMME 4.7. — *Soit $\alpha > 5^n$. Pour ε suffisamment petit, le cycle géométrique ε -régulier (V, f, \mathcal{G}) admet des boules (α, r) -admissibles centrées en chacun de ses points.*

Démonstration du lemme 4.7. — On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe un point v de V tel qu'aucune boule centrée en v ne soit (α, r) -admissible. Soit m la partie entière de $\frac{\log R_0 - \log r}{\log 5}$. On a alors : $5^{-(m+1)}R_0 < r \leq 5^{-m}R_0$.

Le volume de la boule $B(v, R_0)$ vérifie :

$$\begin{aligned} \text{vol}(B(v, R_0)) &\geq \alpha^m \text{vol}(B(v, r)) \geq \alpha^m A_n r^n \geq 5^{-n} (5^{-n}\alpha)^m A_n R_0^n \\ &\geq 5^{-n} (5^{-n}\alpha)^{\log_5 \frac{R_0}{5r}} A_n R_0^n. \end{aligned}$$

Comme $\lim_{r \rightarrow 0} (5^{-n}\alpha)^{\log_5 \frac{R_0}{5r}} = +\infty$, cette dernière inégalité est impossible pour r suffisamment petit. □

4.4. Démonstration du théorème 4.1

Rappelons que (V, f, \mathcal{G}) est un cycle géométrique régulier qui représente la classe h dans $h \in H_n(\pi; \mathbb{Z})$. Choisissons $\alpha > 5^n$, de sorte que l'on puisse appliquer les lemmes 4.6 et 4.7. On construit alors un « système maximal » B_1, \dots, B_N de boules (α, r) -admissibles disjointes de V de la manière suivante :

- On prend un point v_1 de V et on note B_1 la boule (α, r) -admissible de plus grand rayon (que l'on note R_1) centrée en v ;
- Supposons alors construites B_1, \dots, B_j . On prend pour B_{j+1} la boule (α, r) -admissible de plus grand rayon (noté R_{j+1}) ne rencontrant pas les boules B_1, \dots, B_j .

Ce processus de construction est correct, puisque le rayon des boules admissibles est minoré par r . Notons v_1, \dots, v_N les centres des boules ainsi construites. On peut noter que les boules concentriques $2B_1, \dots, 2B_N$, de rayons respectifs $2R_1, \dots, 2R_N$, recouvrent V . En effet, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $v \in V$ qui n'appartienne à aucune des boules $2B_1, \dots, 2B_N$. On a alors, pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, $\text{dist}(v, v_i) \geq R_N$. Mais il existe une boule admissible de centre v et de rayon inférieur à R_N , ce qui contredit la maximalité du système B_1, \dots, B_N .

Désormais \mathcal{P} désigne le nerf de ce recouvrement et $p : V \rightarrow \mathcal{P}$ l'application canonique induite par une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement. Selon le lemme 4.3, il existe $g : \mathcal{P} \rightarrow K(\pi, 1)$ tel que, à homotopie près, le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & K(\pi, 1) \\ p \downarrow & \nearrow g & \\ \mathcal{P} & & \end{array}$$

Pour $k \in \{0, \dots, N\}$, notons N_k le nombre de simplexes de dimension k de \mathcal{P} . Pour majorer N_0 , il n'y a pas de difficulté. Avec les notations du lemme 4.6, on a :

$$\text{vol}(V, \mathcal{G}) \geq \sum_{i=1}^N \text{vol}(B_i) \geq N_0 C_n(\alpha) R_0^n.$$

Comme $R_0 = \frac{1}{12} \text{syst}(V, f, \mathcal{G})$, on obtient :

$$N_0 \leq \frac{12^n}{C_n(\alpha)} \sigma(V, f, \mathcal{G}).$$

Notons que le résultat du lemme 4.6 est encore valable en augmentant $m_0(\alpha)$. On peut donc choisir :

$$m_0(\alpha) = \frac{\log \text{vol}(V, \mathcal{G}) - n \log R_0}{\log \alpha - n \log 5}.$$

Prenons, pour l'instant, α de sorte que : $\log \alpha = n \log 5 + \log \text{vol}(V, \mathcal{G}) - n \log R_0$. Il vient ainsi $m_0(\alpha) = 1$ et $C_n(\alpha) = 5^{-n} A_n$. On en déduit que :

$$N_0 \leq 60^n A_n^{-1} \sigma(V, f, \mathcal{G}).$$

On va maintenant majorer le nombre N_1 de simplexes de dimension 1 de \mathcal{N} : il s'agit du nombre de doubles intersections entre boules du recouvrement.

Fixons $j \in \{1, \dots, N\}$. On suppose que la boule $2B_j$ rencontre les boules $2B_{j_r}$ pour $r = 1, \dots, s_j$ et $j_r > j$. La boule concentrique $5B_j$ de rayon $5R_j$ contient alors toutes les boules B_{j_r} (et c'est cette propriété qui motive la définition des boules admissibles). En effet, pour $v \in B_{j_r}$ on a :

$$\begin{aligned} \text{dist}(v, v_i) &\leq \text{dist}(v, v_{j_r}) + \text{dist}(v_{j_r}, v_j) \\ &< R_{j_r} + 4R_j \leq 5R_j \end{aligned}$$

Comme la boule B_j est α -admissible, il vient :

$$\text{vol}(B_j) \geq \alpha^{-1} \text{vol}(5B_j) \geq \alpha^{-1} \sum_{r=1}^{s_j} \text{vol}(B_{j_r})$$

Ainsi, en utilisant le lemme (4.6), on obtient :

$$\begin{aligned} \text{vol}(V, \mathcal{G}) &\geq \sum_{j=1}^m \text{vol}(B_j) \geq \alpha^{-1} \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^{s_j} \text{vol}(B_{j_k}) \right) \\ &\geq \alpha^{-1} \sum_{j=1}^m s_j C_n(\alpha) R_0^n \geq \alpha^{-1} C_n(\alpha) R_0^n \underbrace{\sum_{j=1}^m s_j}_{=N_1}. \end{aligned}$$

Avec $R_0 = \frac{1}{12} \text{syst}(V, f, \mathcal{G})$, il vient :

$$(4.2) \quad N_1 \leq \frac{12^n \alpha}{C_n(\alpha)} \sigma(V, f, \mathcal{G}).$$

Avec différents choix de α , on peut alors borner N_1 de différentes manières en fonction de $\sigma(h)$.

Prenons encore $m_0(\alpha) = \frac{\log \text{vol}(V, \mathcal{G}) - n \log R_0}{\log \alpha - n \log 5}$ et α de sorte que :

$$\begin{aligned} \log \alpha &= n \log 5 + \sqrt{\log \text{vol}(V, \mathcal{G}) - n \log R_0} \\ &= n \log 5 + \sqrt{\log \sigma(V, f, \mathcal{G}) + n \log 12}. \end{aligned}$$

Il vient $m_0(\alpha) = (\log \sigma(V, f, \mathcal{G}) + n \log 12)^{\frac{1}{2}}$. Avec (4.2) on obtient :

$$N_1 \leq 60^n A_n^{-1} \sigma(V, f, \mathcal{G}) \exp \left((1 + n \log 5) \sqrt{\log \sigma(V, f, \mathcal{G}) + n \log 12} \right).$$

Comme $\sigma(V, f, \mathcal{G}) \leq (1 + \varepsilon) \sigma(h)$, on obtient, en faisant tendre ε vers 0 (N_1 étant indépendant de ε) :

$$N_1 \leq 60^n A_n^{-1} \sigma(h) \exp \left((1 + n \log 5) \sqrt{\log \sigma(h) + n \log 12} \right).$$

Regardons maintenant comment se majore N_2 . Fixons j dans $\{1, \dots, N\}$. Pour $j_r > j$ avec $r \in \{1, \dots, s_j\}$, on suppose que les boules B_j , B_{j_r} et $B_{j_{r_k}}$ où $j_{r_k} > j_r$ et $k \in \{1, \dots, s_{j_r}\}$ ont une intersection non vide. Comme précédemment, la boule $B(j, 5R_j)$ contient toutes les boules B_{j_r} , et chaque

boule $5B_j$, contient toutes les boules $B_{j_r k}$. Il vient alors :

$$\begin{aligned} \text{vol}(V, \mathcal{G}) &\geq \sum_{j=1}^N \text{vol}(B_j) \\ &\geq \alpha^{-1} \sum_{j=1}^N \text{vol}(5B_j) \\ &\geq \alpha^{-1} \sum_{j=1}^N \sum_{r=1}^{s_j} \text{vol}(B_{j_r}) \\ &\geq \alpha^{-2} \sum_{j=1}^N \sum_{r=1}^{s_j} \text{vol}(5B_{j_r}) \\ &\geq \alpha^{-2} \sum_{j=1}^N \sum_{r=1}^{s_j} \sum_{k=1}^{s_{j_r}} \text{vol}(B_{j_r k}) \\ &\geq \alpha^{-2} \sum_{j=1}^N \sum_{r=1}^{s_j} \sum_{k=1}^{s_{j_r}} C_n(\alpha) R_0^n \\ &\geq \alpha^{-2} C_n(\alpha) R_0^n \underbrace{\sum_{j=1}^N \sum_{r=1}^{s_j} s_{j_r}}_{=N_2}. \end{aligned}$$

Il vient donc $N_2 \leq \frac{12^n \alpha^2}{C_n(\alpha)} \sigma(V, f, g)$. De la même manière, on obtient $N_k \leq \frac{12^n \alpha^k}{C_n(\alpha)} \sigma(V, f, g)$, ce qui donne :

$$N_k \leq 12^n \alpha^k e^{n \log 5 m_0(\alpha)} \sigma(V, f, g).$$

Avec la même valeur de $m_0(\alpha)$ et de α , il vient :

$$\alpha^k = 5^{kn} \exp(k \sqrt{\log \text{vol}(V, \mathcal{G}) - n \log R_0}),$$

d'où : $N_k \leq (12.5^k)^n A_n^{-1} \sigma(h) \exp((k + n \log 5) \sqrt{\log \sigma(h) + n \log 12})$.

Cette formule étant encore valable pour $k = 0$, le théorème 4.1 est ainsi démontré.

Remarque 4.8. — On ne peut remplacer r par ε dans la définition des boules (α, r) -admissibles. En effet, le nombre N_k de simplexes de dimension

k de \mathcal{P} dépend de α et de r . Or, pour obtenir le résultat final, on fait tendre ε vers 0.

4.5. Une majoration des nombres de Betti d'une variété asphérique

Le théorème 4.1 permet de majorer les nombres de Betti d'une variété fermée asphérique M en fonction de son volume systolique (comparer avec [25], page 75). Rappelons qu'un espace topologique X est dit asphérique lorsque pour $i \geq 2$ on a $\pi_i(X) = 0$.

THÉORÈME 4.9 (Gromov). — *Soit M une variété fermée de dimension n , orientable et asphérique. Les nombres de Betti de M vérifient, pour $k \in \{0, \dots, n\}$:*

$$b_k(M) \leq C\sigma(M) \exp(C' \sqrt{\log \sigma(M)}),$$

où C_n et C'_n sont deux constantes universelles qui ne dépendent que de la dimension.

Démonstration. — Soit π le groupe fondamental de M . Puisque M est asphérique, on a $M = K(\pi, 1)$. Selon le théorème 4.1, il existe un polyèdre \mathcal{P} et une application $\phi : \mathcal{P} \rightarrow M$ tels que :

— le nombre N_k de simplexes de dimension k de \mathcal{P} vérifie :

$$(4.3) \quad N_k \leq C\sigma(M) \exp(C' \sqrt{\log \sigma(M)}),$$

où C_n et C'_n sont deux constantes universelles qui ne dépendent que de n ;

— l'application induite en homologie par ϕ envoie une certaine classe h' de $H_n(\mathcal{P}; \mathbb{Z})$ sur la classe fondamentale $[M]$ de M .

Fixons k dans $\{0, \dots, n\}$. On considère le « cup-product »

$$H^k(M; \mathbb{R}) \times H^{n-k}(M; \mathbb{R}) \rightarrow H^n(M; \mathbb{R}),$$

ainsi que la « forme bilinéaire » $\psi_k : H^k(M; \mathbb{R}) \times H^{n-k}(M; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour (α, β) dans $H^k(M; \mathbb{R}) \times H^{n-k}(M; \mathbb{R})$, par :

$$\psi_k(\alpha, \beta) = \alpha \smile \beta([M]) \in \mathbb{R}.$$

Rappelons que $H^k(M; \mathbb{R})$ est le dual algébrique de $H_k(M; \mathbb{R})$. Pour β dans $H^{n-k}(M; \mathbb{R})$ considérons

$$\psi_k^\beta : \alpha \mapsto \psi_k(\alpha, \beta) = \alpha \smile \beta([M]),$$

qui est une forme linéaire sur $H^k(M; \mathbb{R})$. On dispose ainsi d'une application linéaire :

$$\varphi_k : H^{n-k}(M; \mathbb{R}) \rightarrow H^k(M; \mathbb{R})^*,$$

définie par $\varphi_k(\beta) = \psi_k^\beta$, où $H^k(M; \mathbb{R})^*$ est le dual algébrique de $H^k(M; \mathbb{R})$.

On peut alors définir le rang de $[M]$ par :

$$\text{rg}_k([M]) = \text{rg}(\varphi_k).$$

Ce rang dépend bien sûr de k , et on peut définir de la même manière le rang d'une classe homologique quelconque de $H_n(M; \mathbb{R})$ ou de $H_n(\mathcal{P}; \mathbb{R})$.

On a alors :

$$(4.4) \quad \text{rg}_k([M]) \leq \text{rg}_k(h') \leq \dim H^k(P; \mathbb{R}) \leq N_k.$$

Désignons maintenant par $D : H^k(M; \mathbb{R}) \rightarrow H_{n-k}(M; \mathbb{R})$ l'isomorphisme de Poincaré (voir [30]). Si \frown désigne le « cap-product » :

$$\frown : H_n(M; \mathbb{R}) \times H_k(M; \mathbb{R}) \rightarrow H_{n-k}(M; \mathbb{R}),$$

on a $D(\alpha) = [M] \frown \alpha$. Soit ${}^tD : H_{n-k}(M)^* \rightarrow H^k(M)^*$ la transposée de D . L'application tD est un isomorphisme et, pour $\alpha \in H^k(M; \mathbb{R})$ et $\beta \in H^{n-k}(M; \mathbb{R})$, on dispose de la relation classique ([30] page 249) :

$$\alpha \smile \beta([M]) = \beta([M] \frown (\alpha)) = \beta \circ D(\alpha) = {}^tD(\beta)(\alpha).$$

Ainsi $\varphi_k = {}^tD$: c'est un isomorphisme, donc $\text{rg}(\varphi_k) = b_k(M)$. On peut alors conclure en combinant (4.3) et (4.4). □

Remarque 4.10. — Pour une classe homologique quelconque $h \in H_n(\pi; \mathbb{R})$, la démonstration ci-dessus permet de dire que :

$$\text{rg}_k(h) \leq C_n \sigma(h) \exp(C'_n \sqrt{\log \sigma(h)}),$$

où C_n et C'_n sont deux constantes universelles qui ne dépendent que de n .

5. Entropie volumique et volume systolique

5.1. Introduction

Le but de ce paragraphe est de présenter comment la technique de régularisation permet d'obtenir des relations liant l'entropie volumique et le volume systolique. Avant de voir ces relations, il est nécessaire de rappeler quelques notions. Dans la suite, toutes les variétés considérées sont compactes et sans bord. On verra aussi une relation entre l'entropie volumique, le volume systolique et le quotient embolique d'une variété compacte.

5.2. Entropie volumique et entropie volumique minimale d'une variété

Passons maintenant aux notions d'entropie volumique et d'entropie volumique minimale. Soit (M, g) une variété riemannienne compacte sans bord. On fixe $m_0 \in M$ et $\tilde{m}_0 \in \tilde{M}$ tel que $p(\tilde{x}_0) = m_0$. On notera dans la suite $p : \tilde{M} \rightarrow M$ son revêtement universel riemannien et on identifiera $\pi_1(M, m_0)$ et le groupe des automorphismes du revêtement.

DÉFINITION 5.1. — L'entropie volumique de (M, g) est :

$$h_{\text{vol}}(g) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\log(\text{vol}(B(\tilde{m}_0, R)))}{R},$$

où $B(\tilde{m}_0, R)$ désigne la boule de centre \tilde{m}_0 et de rayon R dans \tilde{M} .

Cette limite existe bien, par compacité de M , et ne dépend pas du choix du point \tilde{m}_0 (voir [38]).

DÉFINITION 5.2. — Soit M une variété compacte sans bord de dimension $n \geq 2$. L'entropie volumique minimale de M est :

$$\omega(M) = \inf_g h_{\text{vol}}(M, g) \text{vol}(M, g)^{\frac{1}{n}},$$

l'infimum étant pris sur toutes les métriques riemanniennes sur M .

Remarque 5.3.

- (1) L'entropie volumique minimale est un invariant du type d'homotopie de M . Cela est démontré par Babenko dans [2].
- (2) Lorsque M admet une métrique localement symétrique g_0 de courbure négative alors :

$$\omega(M) = h_{\text{vol}}(M, g_0) \text{vol}(M, g_0)^{\frac{1}{n}}.$$

Le cas $n = 2$ a été démontré par Katok (voir [32]) et le cas $n = 3$ par Besson, Courtois et Gallot (voir [13]).

- (3) Gromov a relié l'entropie volumique minimale au volume simplicial $\|M\|$ d'une variété M de dimension n , où $\|M\| = \inf \left\{ \sum |r_i| \right\}$, l'infimum étant pris sur tous les cycles réels $\sum r_i \sigma_i$ qui représentent la classe fondamentale de M . Plus précisément, il a montré dans [24] qu'il existe une constante C_n qui ne dépend que de la dimension de M telle que :

$$\omega(M) \geq C_n \|M\|.$$

- (4) Dans [14], Brunnbauer a montré (par exemple) que, pour une variété orientable M , de dimension n de groupe fondamental π , alors $\omega(M)$ ne dépend que de la valeur de $f_*[M] \in H_n(\pi; \mathbb{Z})$ où f_* est l'application induite en homologie par l'application classifiante $f : M \rightarrow K(\pi, 1)$.
- (5) Manning a démontré que l'entropie volumique de la variété (M, g) est reliée à l'entropie topologique $h_{\text{top}}(M, g)$ du flot géodésique de (M, g) (voir [38] et [33]) par l'inégalité :

$$h_{\text{vol}}(M, g) \leq h_{\text{top}}(M, g).$$

De plus il y a égalité lorsque (M, g) est à courbure négative.

5.3. Entropie volumique relative

On peut définir différentes entropies volumiques relatives de la manière suivante. Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de groupe fondamental π . Il est possible, pour tout sous groupe distingué G de π , de définir

l'entropie volumique de M associée à G en considérant le revêtement galoisien $\widetilde{M} \rightarrow M$ associé à G , au lieu du revêtement universel de M , dans la définition 5.1 (voir [2]). Notons $h_{\text{vol}}(M, g, G)$ l'entropie ainsi définie. En particulier, on a : $h_{\text{vol}}(M, g, \pi) = h_{\text{vol}}(M, g)$.

L'entropie volumique minimale associée à G , est alors (par définition) :

$$\omega_G(M) = \inf_g h_{\text{vol}}(M, g, G),$$

l'infimum étant pris sur toutes les métriques riemanniennes sur M de volume 1.

Parmi ces entropies minimales, on retrouve $\omega(M)$. Il y aussi l'entropie minimale homologique $\omega_H(M)$ associée au sous-groupe $H = \ker \psi$ de π , où $\psi : \pi_1(M) \rightarrow H_1(M)/_{\text{Tor}}$. Babenko a démontré, dans [2], que toutes ces entropies minimales sont des invariants homotopiques de M et que, par exemple, dans le cas où M est orientable, lorsque l'application classifiante $f : M \rightarrow K(\pi_1(M), 1)$ vérifie $f_*[M] = 0$, alors $\omega_G(M) = 0$ pour tout sous-groupe distingué G d'indice infini dans $\pi_1(M)$.

Soient maintenant π un groupe de présentation finie, $h \in H_n(\pi; \mathbb{Z})$ et (V, f, g) un cycle géométrique représentant h . On peut définir (voir [42]) de la même manière l'entropie volumique du cycle géométrique (V, f, g) en regardant la croissance du volume des boules dans le revêtement galoisien $\widetilde{V} \rightarrow V$ associé au sous-groupe distingué $\ker f_*$ de $\pi_1(V)$:

$$h_{\text{vol}}(V, f, g) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\log(\text{vol}(B(\widetilde{m}_0, R)))}{R},$$

où $\widetilde{m}_0 \in \widetilde{V}$. On a alors le résultat suivant :

THÉORÈME 5.4 (Sabourau). — *Pour tout cycle géométrique (V, f, g) ε -régulier qui représente une classe d'homologie non triviale dans $H_n(\pi; \mathbb{Z})$, on a :*

$$h_{\text{vol}}(V, f, g) \leq \frac{1}{\beta \text{ syst}(V, f, g)} \log \left(\frac{\sigma(V, f, g)}{A_n \alpha^n} \right)$$

où $\alpha \geq \varepsilon$, $\beta > 0$, $4\alpha + \beta < \frac{1}{2}$ et la constante A_n est donnée par le théorème A.

On va voir dans la suite la démonstration de ce résultat. Mais auparavant, on a besoin de rappeler quelques résultats sur l'entropie.

Remarque 5.5. — On peut définir l'entropie volumique minimale de h par :

$$\omega(h) = \inf_{(X,f,g)} h_{vol}(V, f, g) \text{vol}(V, \mathcal{G})^{\frac{1}{n}},$$

où (V, f, g) décrit l'ensemble des cycles géométriques qui représentent h . L'inégalité du théorème 5.4 donne alors, pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ qui vérifient $4\alpha + \beta < \frac{1}{2}$:

$$\omega(h) \leq \frac{\sigma(h)^{\frac{1}{n}}}{\beta} \log \left(\frac{\sigma(h)}{A_n \alpha^n} \right).$$

5.4. Entropie volumique et classes d'homotopie des lacets

Avant de démontrer le théorème 5.4, rappelons une autre définition de l'entropie volumique d'une variété riemannienne compacte, qui est reliée au nombre $P_{m_0}(L)$ de classes d'homotopie de lacets de point base m_0 ayant un représentant de longueur inférieure à L . Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de groupe fondamental π . On note $\widetilde{\text{dist}}$ la distance induite par celle de M sur son revêtement universel riemannien \widetilde{M} . Dans la suite, on désignera par Δ un domaine fondamental de l'action de π sur \widetilde{M} et on désignera par $\mathcal{H}(m_0, L)$ l'ensemble des classes d'homotopie de point base $m_0 \in M$ qui peuvent être représentées par un lacet de longueur inférieure à L . Je rappelle le résultat bien connu suivant (voir par exemple [35]).

THÉORÈME 5.6. — *Soient (M, g) une variété riemannienne compacte et $m_0 \in M$. On a alors :*

$$h_{vol}(M, g) = \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{\log(P_{m_0}(L))}{L}.$$

On commence par montrer le lemme suivant.

LEMME 5.7. — *On a :*

$$P_{m_0}(L) = \text{card} \left\{ \gamma \in \pi \mid \widetilde{\text{dist}}(\widetilde{m}_0, \gamma \cdot \widetilde{m}_0) \leq L \right\}.$$

Démonstration du lemme 5.7. — Tout lacet c de point base m_0 dans M se relève en un unique chemin \widetilde{c} dans \widetilde{M} d'origine \widetilde{m}_0 . Si on prend maintenant deux lacets c_1 et c_2 de point base m_0 dans M , ces deux lacets

sont homotopes si et seulement si les chemins \tilde{c}_1 et \tilde{c}_2 (qui ont pour origine \tilde{m}_0) ont mêmes extrémités (propriété de relèvement des homotopies) i.e. si et seulement s'il existe $\gamma \in \pi$ tel que

$$\tilde{c}_1(1) = \tilde{c}_2(1) = \gamma \cdot \tilde{m}_0.$$

Soit $H \in \mathcal{H}(m_0, L)$, représentée par un lacet $c : [0, 1] \rightarrow M$ de longueur inférieure à L . On associe à cette classe l'unique élément $\gamma \in \pi$ tel que $\tilde{c}(1) = \gamma \cdot \tilde{m}_0$. On a alors :

$$\widetilde{\text{dist}}(\tilde{m}_0, \gamma \tilde{m}_0) \leq \text{long}(\tilde{c}) = \text{long}(c) = L.$$

On a donc correctement défini une application clairement injective :

$$\phi : \mathcal{H}(m_0, L) \rightarrow \left\{ \gamma \in \pi \mid \widetilde{\text{dist}}(\tilde{m}_0, \gamma \cdot \tilde{m}_0) \leq L \right\}.$$

Il reste à montrer que ϕ est surjective. Prenons $\gamma \in \pi$ tel que $\widetilde{\text{dist}}(\tilde{m}_0, \gamma \cdot \tilde{m}_0) \leq L$. Soit \tilde{c} une géodésique minimisante de \tilde{m}_0 à $\gamma \cdot \tilde{m}_0$. Le lacet $c = p \circ \tilde{c}$ (qui est de point base m_0) est de longueur inférieure à L et γ est l'image de la classe d'homotopie de c par ϕ . \square

Démonstration du théorème 5.6. — Soit D le diamètre de Δ ; c'est aussi le diamètre de tout translaté de Δ par un élément de π , puisque π agit par isométries sur \widetilde{M} . Posons $N_1(L) = \text{card} \{ \gamma \in \pi \mid \gamma \cdot \Delta \subset \overline{B}(\tilde{m}_0, L) \neq \emptyset \}$ où $\overline{B}(\tilde{m}_0, L)$ désigne la boule fermée de centre \tilde{m}_0 et de rayon L . On a :

$$N_1(L) \leq \text{card} \left\{ \gamma \in \pi \mid \widetilde{\text{dist}}(\tilde{m}_0, \gamma \cdot \tilde{m}_0) \leq L \right\} = P_{m_0}(L).$$

Or si $\tilde{m} \in B(\tilde{m}_0, L - D)$, il existe $\tilde{p} \in \Delta$ et $\gamma \in \pi$ tel que $\tilde{m} = \gamma \cdot \tilde{p}$, donc $\tilde{m} \in \gamma \cdot \Delta$ et $\gamma \cdot \Delta \subset \overline{B}(\tilde{m}_0, L)$. Il en résulte que $N_1(L) \text{vol}(\Delta, \tilde{g}) \geq \text{vol}(B(\tilde{m}_0, L - D))$ et ainsi :

$$P_{m_0}(L) \geq \frac{\text{vol}(B(\tilde{m}_0, L - D))}{\text{vol}(M, g)}.$$

En passant au logarithme naturel, en divisant par L et en passant à la limite inf lorsque L tend vers $+\infty$:

$$(5.1) \quad \liminf_{L \rightarrow +\infty} \frac{\log P_{m_0}(L)}{L} \geq h_{\text{vol}}(M, g)$$

Posons maintenant $N_2(L) = \text{card} \{ \gamma \in \pi \mid \gamma \cdot \Delta \subset \overline{B}(m_0, L + D) \}$. On a :

$$\text{card} \{ \pi \cdot \tilde{m}_0 \cap \overline{B}(\tilde{m}_0, L) \neq \emptyset \} \leq N_2(L).$$

Mais $N_2(L) \operatorname{vol}(\Delta, \tilde{g}) \leq \operatorname{vol}(B(\tilde{m}_0, L + D))$. Il en résulte que $P_{m_0}(L) \leq \frac{\operatorname{vol}(B(\tilde{m}_0, L + D))}{\operatorname{vol}(M, g)}$, et ainsi :

$$(5.2) \quad \limsup_{L \rightarrow +\infty} \frac{\log P_{m_0}(L)}{L} \leq h_{\operatorname{vol}}(M, g)$$

Avec (5.1) et (5.2), on obtient le résultat souhaité. □

Remarque 5.8. — Le théorème 5.6 est encore valable pour l'entropie relative $h_{\operatorname{vol}}(V, f, g)$ d'un cycle géométrique, la démonstration en est identique.

5.5. Démonstration du théorème 5.4

C'est le modèle type d'illustration de la technique de régularisation. Je vais suivre [42]. On établit d'abord le résultat suivant, qui nous conduira directement à la preuve du théorème 5.4 .

LEMME 5.9 (Sabourau). — Soient π un groupe de présentation finie, (V, f, g) un cycle géométrique représentant une classe $h \in H_n(\pi; \mathbb{Z})$. Pour $\alpha > 0$, soit $(B_1, \dots, B_{N_\alpha})$ un système maximal de boules ouvertes disjointes de M de rayon

$$(5.3) \quad R_\alpha \leq \alpha \operatorname{sys}(V, f, g).$$

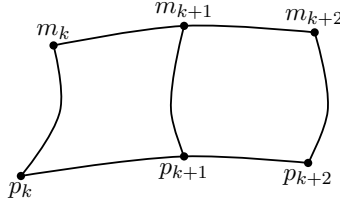
Lorsque $\beta > 0$ vérifie $\alpha + 2\beta < \frac{1}{2}$, on a :

$$h_{\operatorname{vol}}(V, f, g) \operatorname{syst}(V, f, g) \leq \frac{\log N_\alpha}{\beta}.$$

Démonstration. — Notons que les boules concentriques $2B_1, \dots, 2B_{N_\alpha}$ de rayon $2R$ recouvrent V . Pour $i \in \{1, \dots, N_\alpha\}$, on note x_i le centre de la boule B_i et on pose, $m_0 = x_1$.

Soit $c : [0, L] \rightarrow V$ un lacet paramétré par la longueur d'arc avec $m_0 = c(0)$, tel que $f \circ c$ ne soit pas un lacet contractile dans $K(\pi, 1)$. Soit $\beta > 0$. On pose :

$$(5.4) \quad L_\beta = \beta \operatorname{syst}(V, f, g)$$



Supposons que $L_\beta \leq L$. Pour k entier naturel tel que $kL_\beta \leq L$, on considère les points $m_k = c(kL_\beta)$.

Notons s le plus grand des entiers k tels que $kL_\beta \leq L$. Soit $i \in \{0, \dots, s\}$. Le point m_i est recouvert : il existe donc $j_i \in \{1, \dots, N_\alpha\}$ tel que $m_i \in B(x_{j_i}, 2R)$. On pose $p_i = x_{j_i}$, et on a donc $\text{dist}(m_i, p_i) < 2R$.

Pour m et q points de M , on notera $[m, q]$ un plus court chemin de m à q . Pour chaque $k \in \{1, \dots, s-1\}$, on note c_k la restriction de c au segment $[kL_\beta, (k+1)L_\beta]$, et on considère le lacet α_k défini par :

$$\alpha_k = c_k * [m_{k+1}, p_{k+1}] * [p_{k+1}, p_k] * [p_k, m_k],$$

où $*$ désigne la concaténation des chemins. Bien sûr, il peut y avoir plusieurs plus courts chemins de m_k à p_k : on choisit le même chemin pour la construction des lacets α_k et α_{k-1} . Il vient alors :

$$\begin{aligned} \text{long}(\alpha_k) &= \text{long}(c_k) + \text{dist}(m_{k+1}, p_{k+1}) + \text{dist}(p_{k+1}, p_k) + \text{dist}(m_k, p_k) \\ &\leq L_\beta + 4R_\alpha + \text{dist}(p_k, p_{k+1}) \\ &\leq 2(L_\beta + 4R_\alpha) \\ &\leq 2(\beta + 4\alpha)\text{syst}(V, f, g) \end{aligned}$$

Ainsi, lorsque $2(\beta + 4\alpha) < 1$, l'image du lacet α_k par l'application $f : V \rightarrow K(\pi, 1)$ est contractile. Il en va de même pour les lacets

$$\alpha_0 = c_0 * [m_1, p_1] * [p_1, m_0] \quad \text{et} \quad \alpha_s = c_s * [m_s, p_s] * [p_s, m_0].$$

Considérons alors le lacet

$$(5.5) \quad c' = [m_0, p_1] * [p_1, p_2] * \dots * [p_s, m_0],$$

D'après ce qui précède, le lacet $f \circ c'$ est homotope au lacet $f \circ c$. De plus, deux lacets c_1 et c_2 de point base m_0 qui représentent des éléments distincts de $\pi_1(V)/\ker f_*$ permettent de construire, par (5.5), deux lacets c'_1 et c'_2 qui représentent encore des éléments distincts de $\pi_1(V)/\ker f_*$.

Or il y a N_α^s lacets distincts construits à partir de la formule (5.5) (en choisissant, bien entendu, le même chemin minimisant entre les centres des boules du recouvrement).

Ainsi : $P_{m_0}(L) \leq N_\alpha^s$. Comme $s \leq \frac{L}{\beta \operatorname{syst}(M, g)}$, il vient alors :

$$\log P_{m_0}(L) \leq s \log N_\alpha \leq \frac{L}{\beta \operatorname{syst}(V, f, g)} \log N_\alpha,$$

ce qui prouve le lemme 5.9. □

De ce lemme, découle immédiatement la preuve du théorème 5.4. Prenons $R_\alpha = \alpha \operatorname{syst}(V, f, g)$. Supposons que (V, f, g) soit un cycle ε -régulier. Puisque $\alpha < \frac{1}{2}$, le théorème 3.1 s'applique : pour tout $i \in \{1, \dots, N_\alpha\}$ on a $\operatorname{vol}(B_i) \geq A_n r R_\alpha^n$ pour tout $i \in \{1, \dots, N_\alpha\}$. Ainsi

$$\operatorname{vol}(V, f, g) \geq N_\alpha A_n r R_\alpha^n,$$

et avec l'inégalité du lemme 5.9, on obtient

$$h_{\operatorname{vol}}(V, f, g) \operatorname{syst}(V, f, g) \leq \frac{1}{\beta} \log \frac{\sigma(V, f, g)}{A_n \alpha^n},$$

ce qui prouve le théorème 5.4.

5.6. Une inégalité liant le volume systolique, l'entropie volumique et le quotient embolique

Le but de ce paragraphe est de présenter une inégalité reliant l'entropie volumique minimale, le volume systolique et le quotient embolique d'une variété compacte. Avant d'énoncer cette inégalité, il est nécessaire de rappeler quelques notions.

Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension $n \geq 1$. On considère le rapport :

$$\operatorname{emb}(M, g) = \frac{\operatorname{vol}(M, g)}{\operatorname{inj}(M, g)^n},$$

où $\text{inj}(M, g)$ désigne le rayon d'injectivité de la variété (M, g) , que l'on appellera quotient embolique de (M, g) .

Berger a démontré dans [10] l'existence d'une constante $C_n > 0$ qui ne dépend que de la dimension de M telle que :

$$(5.6) \quad \text{emb}(M, g) \geq C_n$$

Cela autorise la définition suivante.

DÉFINITION 5.10. — *Soit M une variété (compacte sans bord) de dimension n . La constante embolique de M est :*

$$\text{emb}(M) = \inf_g \text{emb}(M, g),$$

l'infimum étant pris sur toutes les métriques riemanniennes g sur M .

Remarque 5.11. — La constante C_n de l'inégalité (5.6) est explicite, il s'agit de $\frac{\omega_n}{\pi^n}$, où ω_n désigne le volume de la sphère unité S^n de \mathbb{R}^{n+1} . De plus, Berger a démontré qu'il y a égalité dans (5.6) si et seulement si (M, g) est la sphère de dimension n munie de sa métrique canonique g .

On aura besoin dans la suite du résultat suivant, démontré dans [19], qui met en jeu le rayon d'injectivité d'une variété compacte (voir [22]).

THÉORÈME 5.12. — *Soit (M, g) est une variété riemannienne compacte sans bord de dimension n . Il existe une constante $c_n > 0$, qui ne dépend que de la dimension de M , telle que les boules $B(R)$ de M de rayon $R \in [0, \frac{1}{2} \text{inj}(M, g)]$ vérifient :*

$$(5.7) \quad \text{vol}(B(R)) \geq c_n R^n.$$

Remarque 5.13.

- (1) L'énoncé de ce résultat est à comparé avec le théorème 3.1 page 12. Les techniques mises en jeu dans la démonstration utilise bien entendu la courbure, qui n'intervient pas en géométrie systolique.
- (2) On dispose d'une expression explicite de la constante c_n . En désignant par ω_n le volume de la sphère unité S^n dans \mathbb{R}^{n+1} muni de la métrique

canonique, on a

$$c_n = \frac{2^{n-1} \omega_{n-1}^n}{\omega_n^{n-1} n^n}.$$

On peut maintenant énoncer un résultat qui relie le volume systolique, l'entropie volumique et le quotient embolique d'une variété compacte.

THÉORÈME 5.14. — *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte non simplement connexe. Pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que $\alpha + 2\beta < \frac{1}{2}$, on a :*

$$\omega(M) \leq \frac{\sigma(M, g)^{\frac{1}{n}}}{\beta} \log \frac{\text{emb}(M, g)}{c_n \alpha^n},$$

où $\sigma(M, g)$ est le volume systolique de (M, g) et c_n est la constante définie par le théorème 5.12.

La preuve du théorème 5.14 est calquée sur celle du théorème 5.4. On a besoin au préalable du lemme suivant (comparer au lemme 5.9).

LEMME 5.15. — *Soient (M, g) une variété riemannienne compacte non simplement connexe, $\alpha > 0$. Soit $(B_1, \dots, B_{N_\alpha})$ un système maximal de boules ouvertes disjointes de M de rayon*

$$(5.8) \quad R_\alpha = \alpha \text{inj}(M, g).$$

Lorsque $\beta > 0$ vérifie $\alpha + 2\beta < \frac{1}{2}$, on a :

$$h_{\text{vol}}(M, g) \text{ syst}(M, g) \leq \frac{\log N_\alpha}{\beta}.$$

Démonstration du lemme 5.15. — La preuve suit pas à pas celle du lemme 5.9. On regarde seulement la contractibilité des lacets dans M . Comme tout lacet de longueur $2 \text{inj}(M, g)$ est contenu dans une boule de rayon $\text{inj}(M, g)$ qui est contractile, car difféomorphe à une boule euclidienne, on a $2 \text{inj}(M, g) \leq \text{syst}(M, g)$. On obtient, en gardant les notations de la démonstration du lemme 5.9, $\text{long}(\alpha_k) \leq 2(\beta + 2\alpha) \text{syst}(M, g)$. \square

Démonstration du théorème 5.14. — Soit g une métrique riemannienne sur M . Le théorème 5.12 permet de majorer N_α . En effet, on a :

$$\text{vol}(M, g) \geq \sum_{i=1}^{N_\alpha} \text{vol}(B_i) \geq N_\alpha c_n R_\alpha^n.$$

Ainsi $N_\alpha \leq \frac{\text{emb}(M, g)}{\alpha^n c_n}$, donc, avec le lemme 5.15, il vient :

$$h_{\text{vol}}(M, g) \text{ syst}(M, g) \leq \frac{1}{\beta} \log \frac{\text{emb}(M, g)}{\alpha^n c_n}.$$

En multipliant chacun des membres de cette inégalité par $\text{vol}(M, g)^{\frac{1}{n}}$, on obtient l'inégalité du théorème 5.14, en passant à la borne inférieure dans l'inégalité de gauche. \square

Remarque 5.16. — Avec la même technique, Sabourau a prouvé ([42]), que pour $\alpha + 4\beta < \frac{1}{2}$, on a :

$$\omega(M) \leq \frac{\text{emb}(M)^{\frac{1}{n}}}{\beta} \log \frac{\text{emb}(M)}{c_n \alpha^n},$$

en prenant $L_\beta = \beta \text{inj}(M, g)$ dans (5.4).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. C. ÁLVAREZ PAIVA & F. BALACHEFF, « Contact geometry and isosystolic inequalities », *Geom. Funct. Anal.* **24** (2014), n° 2, p. 648-669.
- [2] I. K. BABENKO, « Asymptotic invariants of smooth manifolds », *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.* **56** (1992), n° 4, p. 707-751.
- [3] ———, « Topologie des systoles unidimensionnelles », *Enseign. Math. (2)* **52** (2006), n° 1-2, p. 109-142.
- [4] I. K. BABENKO & F. BALACHEFF, « Systolic volume of homology classes », <http://arxiv.org/abs/1009.2835>, 2010.
- [5] I. K. BABENKO, F. BALACHEFF & G. BULTEAU, « Systolic geometry and simplicial complexity for groups », <http://arxiv.org/abs/1501.01173>, 2015.
- [6] F. BALACHEFF, H. PARLIER & S. SABOURAU, « Short loop decompositions of surfaces and the geometry of Jacobians », *Geom. Funct. Anal.* **22** (2012), n° 1, p. 37-73.
- [7] C. BAVARD, « Inégalité isosystolique pour la bouteille de Klein », *Math. Ann.* **274** (1986), n° 3, p. 439-441.
- [8] M. BERGER, « À l'ombre de Loewner », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **5** (1972), p. 241-260.
- [9] ———, « Du côté de chez Pu », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **5** (1972), p. 1-44.
- [10] ———, « Une borne inférieure pour le volume d'une variété riemannienne en fonction du rayon d'injectivité », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **30** (1980), n° 3, p. 259-265.
- [11] ———, « Systoles et applications selon Gromov », *Astérisque* (1993), n° 216, p. Exp. No. 771, 5, 279-310, Séminaire Bourbaki, Vol. 1992/93.

- [12] ———, *A panoramic view of Riemannian geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 2003, xxiv+824 pages.
- [13] G. BESSON, G. COURTOIS & S. GALLOT, « Volume et entropie minimale des espaces localement symétriques », *Invent. Math.* **103** (1991), n° 2, p. 417-445.
- [14] M. BRUNNBAUER, « Homological invariance for asymptotic invariants and systolic inequalities », *Geom. Funct. Anal.* **18** (2008), n° 4, p. 1087-1117.
- [15] G. BULTEAU, « Cycles géométriques réguliers », à paraître, Bull. SMF.
- [16] D. BURAGO, Y. BURAGO & S. IVANOV, *A course in metric geometry*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 33, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001, xiv+415 pages.
- [17] Y. D. BURAGO & V. A. ZALGALLER, *Geometric inequalities*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 285, Springer-Verlag, Berlin, 1988, Translated from the Russian by A. B. Sossinskiĭ, Springer Series in Soviet Mathematics, xiv+331 pages.
- [18] P. BUSER & P. SARNAK, « On the period matrix of a Riemann surface of large genus », *Invent. Math.* **117** (1994), n° 1, p. 27-56, With an appendix by J. H. Conway and N. J. A. Sloane.
- [19] C. B. CROKE, « Some isoperimetric inequalities and eigenvalue estimates », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **13** (1980), n° 4, p. 419-435.
- [20] C. B. CROKE & M. KATZ, « Universal volume bounds in Riemannian manifolds », in *Surveys in differential geometry, Vol. VIII (Boston, MA, 2002)*, Surv. Differ. Geom., vol. 8, Int. Press, Somerville, MA, 2003, p. 109-137.
- [21] J. DUGUNDJI, *Topology*, Allyn and Bacon, Inc., Boston, Mass., 1966, xvi+447 pages.
- [22] S. GALLOT, D. HULIN & J. LAFONTAINE, *Riemannian geometry*, second éd., Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1990, xiv+284 pages.
- [23] M. GROMOV, *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, Textes Mathématiques [Mathematical Texts], vol. 1, CEDIC, Paris, 1981, Edited by J. Lafontaine and P. Pansu, iv+152 pages.
- [24] ———, « Volume and bounded cohomology », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1982), n° 56, p. 5-99 (1983).
- [25] ———, « Filling Riemannian manifolds », *J. Differential Geom.* **18** (1983), n° 1, p. 1-147.
- [26] ———, « Systoles and intersystolic inequalities », in *Actes de la Table Ronde de Géométrie Différentielle (Luminy, 1992)*, Sémin. Congr., vol. 1, Soc. Math. France, Paris, 1996, p. 291-362.
- [27] ———, *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Progress in Mathematics, vol. 152, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1999, Based on the 1981 French original [MR0682063 (85e :53051)], With appendices by M. Katz, P. Pansu and S. Semmes, Translated from the French by Sean Michael Bates, xx+585 pages.
- [28] L. GUTH, « Notes on Gromov's systolic estimate », *Geom. Dedicata* **123** (2006), p. 113-129.

- [29] ———, « Metaphors in systolic geometry », in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Volume II*, Hindustan Book Agency, New Delhi, 2010, p. 745-768.
- [30] A. HATCHER, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002, xii+544 pages.
- [31] J. J. HEBDA, « Some lower bounds for the area of surfaces », *Invent. Math.* **65** (1981/82), n° 3, p. 485-490.
- [32] A. KATOK, « Entropy and closed geodesics », *Ergodic Theory Dynam. Systems* **2** (1982), n° 3-4, p. 339-365 (1983).
- [33] A. KATOK & B. HASSELBLATT, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 54, Cambridge University Press, Cambridge, 1995, With a supplementary chapter by Katok and Leonardo Mendoza, xviii+802 pages.
- [34] K. U. KATZ, M. G. KATZ, S. SABOURAU, S. SHNIDER & S. WEINBERGER, « Relative systoles of relative-essential 2-complexes », *Algebr. Geom. Topol.* **11** (2011), n° 1, p. 197-217.
- [35] M. G. KATZ, *Systolic geometry and topology*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 137, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007, With an appendix by Jake P. Solomon, xiv+222 pages.
- [36] M. G. KATZ & S. SABOURAU, « Entropy of systolically extremal surfaces and asymptotic bounds », *Ergodic Theory Dynam. Systems* **25** (2005), n° 4, p. 1209-1220.
- [37] S. KODANI, « On two-dimensional isosystolic inequalities », *Kodai Math. J.* **10** (1987), n° 3, p. 314-327.
- [38] A. MANNING, « Topological entropy for geodesic flows », *Ann. of Math. (2)* **110** (1979), n° 3, p. 567-573.
- [39] P. M. PU, « Some inequalities in certain nonorientable Riemannian manifolds », *Pacific J. Math.* **2** (1952), p. 55-71.
- [40] G. REVIRON, « Rigidité topologique sous l'hypothèse "entropie majorée" et applications », *Comment. Math. Helv.* **83** (2008), n° 4, p. 815-846.
- [41] Y. B. RUDYAK & S. SABOURAU, « Systolic invariants of groups and 2-complexes via Grushko decomposition », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **58** (2008), n° 3, p. 777-800.
- [42] S. SABOURAU, « Systolic volume and minimal entropy of aspherical manifolds », *J. Differential Geom.* **74** (2006), n° 1, p. 155-176.
- [43] T. SAKAI, « A proof of the isosystolic inequality for the Klein bottle », *Proc. Amer. Math. Soc.* **104** (1988), n° 2, p. 589-590.

Guillaume BULTEAU
 Institut de Mathématiques et de Modélisation de
 Montpellier (I3M)
 UMR 5149 CNRS - Université Montpellier 2
 Case courrier 051

34095 Montpellier cedex 5 (France)
guillaume.bulteau@ac-montpellier.fr