

Institut Fourier — Université de Grenoble I

Actes du séminaire de
**Théorie spectrale
et géométrie**

Alix DERUELLE

Rapport asymptotique de courbure, courbure positive et non effondrement

Volume 30 (2011-2012), p. 47-75.

<http://tsg.cedram.org/item?id=TSG_2011-2012__30__47_0>

© Institut Fourier, 2011-2012, tous droits réservés.

L'accès aux articles du Séminaire de théorie spectrale et géométrie (<http://tsg.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://tsg.cedram.org/legal/>).

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>

RAPPORT ASYMPTOTIQUE DE COURBURE, COURBURE POSITIVE ET NON EFFONDREMENT

Alix Deruelle

RÉSUMÉ. — On s'intéresse ici à un invariant géométrique associé à toute variété riemannienne non compacte : le rapport asymptotique de courbure. On étudie son influence sur la topologie de la variété sous-jacente en présence d'autres contraintes géométrico-topologiques portant sur le volume asymptotique, la positivité de la courbure (de Ricci) et/ou la finitude du groupe fondamental (à l'infini).

ABSTRACT. — We focus on a geometric invariant associated to any noncompact Riemannian manifold : the asymptotic curvature ratio introduced by Gromov. We study how it interacts with the topology of the underlying manifold with other geometric constraints such as positive asymptotic volume ratio, nonnegative (Ricci) curvature and finiteness of the fundamental group (at infinity).

1. Rapport asymptotique de courbure

1.1. Premières motivations

Commençons par définir l'invariant géométrique qui sera au centre de nos préoccupations : le **rapport asymptotique de courbure** d'une variété riemannienne complète (M^n, g) est défini par,

$$A(g) := \limsup_{r_p(x) \rightarrow +\infty} r_p(x)^2 |\text{Rm}(g)(x)|,$$

pour $p \in M^n$, où $r_p(\cdot) := d_g(p, \cdot)$ désigne la fonction distance au point p .

Remarquons que cette notion est bien définie puisqu'elle ne dépend pas du point base $p \in M^n$. De plus, le rapport asymptotique de courbure est invariant par dilatations de la métrique. Cet invariant géométrique a été introduit par Gromov [25]. Gromov et Lott-Shen [31] ont montré le fait suivant assez déconcertant :

Mots-clés : géométrie riemannienne, courbure positive, cône asymptotique, effondrement à l'infini, topologie des variétés riemanniennes non compactes.

Classification math. : 53, 58.

PROPOSITION 1.1. — *Toute variété paracompacte possède une métrique g riemannienne complète ayant un rapport asymptotique de courbure $A(g)$ fini.*

Par conséquent, la finitude d'un tel invariant ne constitue pas en soi une obstruction topologique, une telle condition est aussi peu restrictive qu'avoir une métrique à courbure bornée. Par contre, il peut-être intéressant de considérer la finitude de cet invariant conjointement avec d'autres hypothèses géométriques ou topologiques. Par exemple, on pourra étudier la topologie des variétés riemanniennes (M^n, g) vérifiant,

$$A(g) < +\infty \quad \text{et} \quad \text{Ric} \geq 0. \quad (1)$$

On commencera par étudier les variétés riemanniennes (M^n, g) vérifiant,

$$A(g) < +\infty \quad \text{et} \quad K \geq 0. \quad (2)$$

On énonce d'abord les principaux résultats sur les espaces à courbure sectionnelle positive dont nous aurons besoin. Une des pierres angulaires du domaine est le théorème de l'âme (Soul Theorem) dû à Cheeger et Gromoll [14]. On rappelle qu'une **âme** $S \subset M$ d'une variété riemannienne (M, g) est une sous-variété compacte totalement convexe.

THÉORÈME 1.2 (Cheeger-Gromoll). — *Soit (M^n, g) une variété riemannienne complète telle que $K \geq 0$. Alors il existe une âme S^k de M^n telle que M^n soit difféomorphe au fibré normal de S^k .*

Nous citons également un résultat dû à Petersen et Guijarro [27] dans le cas où la courbure sectionnelle, en plus d'être positive, tend vers 0 à l'infini.

THÉORÈME 1.3 (Guijarro-Petersen). — *Soit (M^n, g) une variété riemannienne complète à courbure sectionnelle positive telle que $\lim_{+\infty} R = 0$ où R est la courbure scalaire. Alors son âme est plate.*

En particulier, la topologie des n -variétés riemanniennes à courbure sectionnelle positive avec un rapport asymptotique de courbure fini est connue. D'ailleurs, celles qui ont un groupe fondamental fini sont nécessairement difféomorphes à \mathbb{R}^n .

QUESTION 1.4. — *Existe-t-il des variétés vérifiant (1) mais pas (2) ?*

Cette question a du sens pour les variétés de dimensions supérieures ou égales à 3.

Les premiers contre-exemples sont de dimension au moins 4, ce qui n'est pas un hasard. En effet, cela résulte du théorème suivant dû à Shi [40] :

THÉORÈME 1.5 (Shi). — *Soit (M^3, g) une 3-variété riemannienne complète non compacte à courbure de Ricci positive bornée. Alors, son revêtement universel est difféomorphe à \mathbb{R}^3 ou à $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.*

Par conséquent, en dimension 3, les topologies des variétés riemanniennes vérifiant la condition (1) ou la condition (2) coïncident.

Mentionnons un contre-exemple, que nous détaillerons dans la prochaine section, à la question (1.4) en dimension 4. La métrique de Eguchi-Hanson g_{EH} sur le fibré tangent de la 2-sphère TS^2 est Ricci-plate de rapport asymptotique de courbure fini (nul). Or, à l'évidence, TS^2 n'est pas difféomorphe à \mathbb{R}^4 , ainsi, d'après le théorème 1.3, TS^2 ne peut admettre de métrique satisfaisant la condition (2).

Notons que la topologie des variétés riemanniennes non compactes à courbure de Ricci positive en dimension supérieure ou égale à 4 est très peu connue si l'on ne rajoute pas d'hypothèses supplémentaires. On recommande le panorama sur le sujet [39].

Maintenant, si la topologie est connue, que peut-on dire de la géométrie? Par exemple, quelle est la croissance du volume des boules géodésiques? D'après le théorème de Bishop-Gromov, le rapport volumique $r \rightarrow \text{Vol} B(p, r)/r^n$ d'une variété riemannienne complète à courbure de Ricci positive est décroissant sur \mathbb{R}_+ et est majoré par le volume ω_n de la boule unité de l'espace euclidien de dimension n . On note

$$\text{AVR}(g) := \lim_{r \rightarrow +\infty} \text{Vol} B(p, r)/r^n.$$

Dans le cas où cette limite est strictement positive, on a le

THÉORÈME 1.6 (Anderson). — *Soit (M^n, g) une variété riemannienne complète vérifiant $\text{Ric} \geq 0$ et $\text{AVR}(g) > 0$. Alors, le groupe fondamental $\pi_1(M^n)$ de M^n est fini.*

La question suivante propose une réciproque. Notons qu'il n'est pas raisonnable de s'affranchir de l'hypothèse de finitude du rapport asymptotique de courbure : le produit métrique $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$ est un contre-exemple, le paraboloïde en est un autre.

QUESTION 1.7. — *Soit (M^n, g) telle que $\pi_1(M^n) = 1$, $K \geq 0$ et $\text{A}(g) < +\infty$. A t-on nécessairement $\text{AVR}(g) > 0$?*

Cette question sera étudiée en section 3 où l'on obtient une réponse satisfaisante en dimension impaire : c'est le théorème 3.1.

S'ouvrent alors deux perspectives : soit on considère la question 1.7 pour les dimensions paires (pour commencer $n = 4$), soit on décide d'affaiblir notre hypothèse de positivité. On se concentrera d'abord sur la deuxième :

QUESTION NAÏVE 1.8. — *Soit (M^n, g) telle que $\pi_1(M^n)$ est fini, $\text{Ric} \geq 0$ et $A(g) < +\infty$. A t-on nécessairement $\text{AVR}(g) > 0$?*

Dans la prochaine section, on exhibera des contre-exemples en toutes dimensions : on considèrera des métriques sur $\mathbb{S}^{n-2} \times \mathbb{R}^2$, pour $n \geq 4$, vérifiant la condition 1 mais ayant un rapport asymptotique volumique AVR nul. Néanmoins, on remarque que ces variétés simplement connexes ne sont pas simplement connexes à l'infini puisqu'elles sont difféomorphes, à l'infini, à $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-2}$.

Ainsi, on peut légitimement se poser la

QUESTION NAÏVE 1.9. — *Soit (M^n, g) simplement connexe à l'infini telle que $\text{Ric} \geq 0$ et $A(g) < +\infty$. A t-on nécessairement $\text{AVR}(g) > 0$?*

La question mérite d'être posée en dimension 3 : c'est l'affaire de la section 4. Par contre, la dimension 4 contient des contre-exemples : la métrique de Taub-NUT [1] sur \mathbb{R}^4 Ricci-plate, asymptotique à $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^1$. On verra dans la section 4 que l'on peut répondre à la question 1.9 par l'affirmative sous des hypothèses plus restrictives.

1.2. Exemples

On distingue deux types d'exemples suivant leur (non)-effondrement. On rencontre dans la littérature plusieurs notions d'effondrement (Chap. 8, [25]). On retiendra la notion d'effondrement volumique : une suite de variétés riemanniennes pointées $(M_i, g_i, p_i)_i$ est effondrée au sens de Cheeger et Colding [11] si la courbure de Ricci des métriques g_i est uniformément minorée et si $\lim_{i \rightarrow +\infty} \text{Vol}_{g_i} B_{g_i}(p_i, 1) = 0$. On peut éventuellement ajouter des contraintes telles qu'une courbure sectionnelle uniformément minorée ou bornée. Dans notre situation, on s'intéresse à la géométrie asymptotique d'une variété riemannienne fixée (M^n, g) non compacte. Par conséquent, on étudie l'effondrement au sens de Cheeger-Colding des suites du type $(B_{g_i}(x_i, 1/2), g_i, x_i)_i$ où $g_i := r_p(x_i)^{-2}g$ et $\lim_{i \rightarrow +\infty} r_p(x_i) = +\infty$. On remarquera que de telles suites sont à courbure uniformément bornée si $A(g) < +\infty$. Cette notion a le désavantage de manquer d'uniformité. On dira alors qu'une variété riemannienne non compacte (M^n, g) est **uniformément effondrée** à courbure bornée si $A(g) < +\infty$ et si

$$\limsup_{r \rightarrow +\infty} \sup_{r_p(x) \geq r} \text{Vol } B(x, r) / r^n = 0.$$

À l’opposé, on dira qu’une variété riemannienne non compacte (M^n, g) est **uniformément non effondrée** à courbure bornée si $A(g) < +\infty$ et si

$$\liminf_{r \rightarrow +\infty} \inf_{r_p(x) \geq r} \text{Vol } B(x, r) / r^n > 0.$$

On remarquera qu’être uniformément non effondré est plus fort que ne pas être uniformément effondré. Une telle distinction entre effondrement et non effondrement (à l’échelle locale) est adoptée dans [15].

1.2.1. Exemples non effondrés

On cherche ici des exemples de variétés riemanniennes (M^n, g) vérifiant les conditions (1) ou (2) ayant une croissance volumique uniformément euclidienne, i.e

$$ar^n \leq \text{Vol } B(p, r) \leq br^n,$$

pour tout $p \in M^n$ et $r \geq 1$ et des constantes uniformes strictement positives a et b . Lorsque la courbure de Ricci est positive, le théorème de Bishop-Gromov montre que ces conditions se réduisent à $\text{AVR}(g) > 0$.

Nous ne prétendons pas faire ici une liste exhaustive de telles variétés que l’on rencontre dans la littérature. Au contraire, on essaie d’en dégager une caractéristique asymptotique commune. En effet, les exemples non effondrés que nous considérons sont asymptotiquement (en un sens que l’on précisera plus tard) proches d’un cône sur un espace métrique compact plus ou moins régulier de codimension 1 : variété ou espace d’Alexandrov (cf. [6] pour une définition).

Notons qu’il découle du théorème de Toponogov (Chap. 11, [34]) que les variétés riemanniennes complètes à courbure sectionnelle minorée par k sont des espaces d’Alexandrov à courbure $\geq k$.

Maintenant, un cône sur un espace topologique X , noté $C(X)$, est le quotient du produit $[0, +\infty) \times X$ par l’identification des points $\{0\} \times X$. Ce point est alors appelé le sommet du cône et X une section du cône. On rappelle la métrique euclidienne associée à ce cône si X est métrique :

DÉFINITION 1.10. — *Soit (X, d) un espace métrique. La métrique euclidienne, notée parfois d_c , du cône $C(X)$ est,*

$$d_c((t, x), (s, y)) = \sqrt{t^2 + s^2 - 2st \cos(\min(\pi, d(x, y)))},$$

où (t, x) et (s, y) sont deux points de $C(X)$.

Si (X, g) est riemannienne, la métrique riemannienne euclidienne du cône $C(X)$ est,

$$g_c := dt^2 + t^2g,$$

où t désigne la variable radiale.

Lorsque X est d'Alexandrov, on peut se demander s'il y a phénomène d'hérédité pour le cône $C(X)$. Le théorème 10.2.3 de [6] y répond pleinement :

THÉORÈME 1.11 (Burago-Burago-Ivanov). — *Si X est un espace d'Alexandrov à courbure ≥ 1 alors $C(X)$, muni de sa métrique euclidienne, est un espace d'Alexandrov à courbure ≥ 0 .*

Remarque 1.12. — Notons que la métrique riemannienne g_c de la définition 1.10 est singulière au sommet du cône sauf si $(X, g) = (\mathbb{S}^{n-1}, g_{\mathbb{S}^{n-1}})$. Par conséquent, le théorème 1.11 indique que la classe des espaces d'Alexandrov à courbure positive est bien plus vaste que celle des variétés riemanniennes à courbure positive.

Le premier exemple est le cas euclidien :

Exemple 1.13. — $(X, g) = (\mathbb{S}^{n-1}, g_{\mathbb{S}^{n-1}})$ et $(M^n, g) = (\mathbb{R}^n, \text{eucl})$.

Si on autorise une action libre par un groupe fini de rotations euclidiennes :

Exemple 1.14. — On décrit ici la métrique de Eguchi-Hanson sur TS^2 . On considère une métrique de la forme $g_{EH} = dr^2 + \phi^2(r)(\psi^2(r)d\sigma_1^2 + d\sigma_2^2 + d\sigma_3^2)$ où $d\sigma_1^2 + d\sigma_2^2 + d\sigma_3^2$ est la métrique standard de la 3-sphère. En choisissant convenablement ϕ et ψ (cf. [34]), on peut garantir que g_{EH} soit Ricci-plate, que $\phi(r)$ est équivalente, à l'infini, à r et $\psi := \dot{\phi}$ est équivalente à 1. Dans ces conditions, la métrique est asymptotique à $dr^2 + r^2g_{\mathbb{R}P^3}$. En particulier, $\text{AVR}(g_{EH}) > 0$ et (TS^2, g_{EH}) est asymptotique au cône $(C(\mathbb{R}P^3), d_c)$.

Exemple 1.15. — Tout soliton gradient expansif de Ricci (points fixes du flot de Ricci immortels) à courbure de Ricci positive : cf. [Chapitre 4, [17]] pour une définition. Concrètement, H-D. Cao [8] a construit des exemples de solitons gradients expansifs (kähleriens) de Ricci sur \mathbb{C}^n à courbure sectionnelle strictement positive. C'est une famille à un paramètre $c \in (0, 1)$ de métriques g_c asymptotique au cône métrique $(C(\mathbb{S}^{2n-1}), dr^2 + (cr)^2g_{\mathbb{S}^{2n-1}})$ sur la sphère euclidienne, d'angle c . Plus généralement, une telle structure de soliton ayant un rapport asymptotique de courbure fini est asymptotique à un cône sur une variété riemannienne de codimension 1 : [16].

1.2.2. Exemples effondrés

On donne ici des exemples de variétés riemanniennes (M^n, g) vérifiant l'une des deux conditions (1) ou (2) et uniformément effondrées. On dira

qu’une variété riemannienne (M^n, g) présente une **croissance volumique d’ordre** $\alpha > 0$ si

$$ar^\alpha \leq \text{Vol } B(p, r) \leq br^\alpha,$$

pour $r \geq r_0$, $p \in M^n$ et a, b deux constantes strictement positives. Si a, b et r_0 peuvent être choisies indépendamment de p , la croissance volumique sera **uniforme**.

Remarque 1.16. — À ce propos, dans ce cadre, i.e. si $\text{Ric}_g \geq 0$ et $A(g) < +\infty$ et si $\inf_{r>0} \limsup_{x \rightarrow +\infty} \text{Vol } B(x, r)/r^n < C(n)$, un résultat de V. Minerbe [32] nous enseigne que la croissance volumique est d’ordre au plus $n - 1$, c’est-à-dire qu’il existe une constante $c(n)$ telle que pour tout $r \geq 1$, $x \in M^n$, $\text{Vol } B(x, r) \leq c(n)r^{n-1}$. Par conséquent, il n’y a pas de puissance (non entière) comprise entre $n - 1$ et n .

Ainsi, dans ce cadre, la croissance volumique maximale est d’ordre au plus $n - 1$. Que peut-on dire de l’ordre minimal ? Yau [17] estime la croissance volumique minimale de la façon suivante :

PROPOSITION 1.17 (Yau). — *Soit (M^n, g) une variété riemannienne complète à courbure de Ricci positive. Alors, pour tout $p \in M^n$, il existe une constante $C(p) > 0$ telle que pour tout $r \geq 2$, $\text{Vol } B(p, r) \geq C(p)r$.*

De plus, si $\inf_{x \in M^n} \text{Vol } B(x, 1) > 0$, alors on peut choisir une constante C uniforme.

Commençons par un exemple en dimension 2. Tous les exemples abordés de dimension 2 sont asymptotiquement proches d’un cylindre (métrique) $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$. Un exemple fondamental est le cigare décourvert par Hamilton :

Exemple 1.18. — La métrique du cigare sur \mathbb{R}^2 , dans des coordonnées radiales convenables, est

$$g_{\text{cigare}} := ds^2 + \tanh^2 s d\theta^2.$$

Un calcul classique montre que $R(g_{\text{cigare}}) = 16/(e^s + e^{-s})^{-2}$. Ainsi, g_{cigare} satisfait la condition (1) : $A(g) = 0$ et la croissance volumique est linéaire.

Si l’on mime cette construction en dimension supérieure, cela donne la métrique cigare généralisée sur \mathbb{R}^n donnée par $g_{\text{cigare},n} = dt^2 + \tanh^2(t)g_{\mathbb{S}^{n-1}}$. La courbure sectionnelle est strictement positive et la croissance volumique est linéaire. Par contre, si $n \geq 3$, $A(g_{\text{cigare},n}) = +\infty$.

Avant de tester l’hérédité par produit, énonçons un lemme facile à prouver et utile :

LEMME 1.19. — Soit $(M \times N, g+h)$ est une variété riemannienne produit où M est non compacte. Si $A(g+h) < +\infty$ alors

- 1) Si N est non compacte, $(M \times N, g+h)$ est plate.
- 2) Si N est compacte, (N, h) est plate.

Ce lemme permet de construire, en toutes dimensions, des exemples de variétés riemanniennes vérifiant (2) qui présentent une croissance volumique d'ordre minimal.

Exemple 1.20. — Les produits métriques $\mathbb{R} \times N$, $\mathbb{R}^2 \times N$ où N est une variété compacte munie d'une métrique plate et \mathbb{R}^2 est muni de sa métrique cigare.

Passons à des exemples de variétés riemanniennes vérifiant (1) présentant une croissance volumique minimale.

On présente les métriques Ricci-plates construites de façon systématique par L. Bérard Bergery [4] à partir d'une variété compacte Einstein à courbure scalaire strictement positive. On précise également leurs comportements asymptotiques.

PROPOSITION 1.21. — Soit (M^{n-2}, g) une variété riemannienne compacte Einstein telle que $\text{Ric}_g = (n-3)g$. Alors, la variété produit $\mathbb{R}^2 \times M^{n-2}$ admet une métrique explicite Ricci-plate. De plus, cette métrique a un rapport asymptotique de courbure fini et les boules géodésiques ont une croissance volumique d'ordre $n-1$.

Preuve. La première partie est due à L. Bérard Bergery. Ce qui suit est une simple vérification. On rappelle néanmoins la construction de telles métriques.

Soit (M^{n-2}, g) une telle variété riemannienne. On définit la métrique doublement tordue sur $\mathbb{R}^2 \times M^{n-2}$ par $\tilde{g} := dt^2 + \phi(t)^2 d\theta^2 + \psi(t)^2 g$, où ϕ et ψ sont définies comme suit.

Soit ψ la solution de l'équation différentielle $\dot{y} = (1 - y^{-(n-1)})^{1/2}$ avec pour condition initiale $y(0) = 1$. On définit ensuite la fonction ϕ par $\phi := (2/(n-1))\dot{\psi}$. On vérifie ensuite que la métrique est bien Ricci-plate, que $\phi(0) = 0$ et $\dot{\phi}(0) = 1$. Enfin, par construction, $\psi(t)$ est équivalente à l'infini à t et ϕ est équivalente à $2/(n-1)$. Ainsi \tilde{g} est asymptotique, à l'ordre 0, à $dt^2 + 2/(n-1)d\theta^2 + t^2g$. D'où une croissance volumique polynômiale d'ordre $n-1$. Pour la finitude du rapport asymptotique de courbure, il suffit de vérifier que les fonctions,

$$t \rightarrow \frac{t^2\phi''}{\phi} \quad ; \quad t \rightarrow \frac{t^2\psi''}{h} \quad ; \quad t \rightarrow \frac{t\phi'}{\phi} \quad ; \quad t \rightarrow \frac{t\psi'}{\psi} \quad ; \quad t \rightarrow \frac{t}{\psi},$$

sont bornées sur $[0, +\infty)$. \square

Notons que ce théorème s'applique au cas $(M^n, g) = (\mathbb{S}^{n-2}, g_{\mathbb{S}^{n-2}})$ pour produire les métriques connues sous le nom de métriques de Schwarzschild (généralisées). À l'aide du théorème 1.3, cette méthode permet d'exhiber systématiquement des variétés vérifiant (1) et non (2) présentant une croissance volumique minimale, en toutes dimensions supérieures à 4. Elle produit également des contre-exemples à la question 1.8. Cependant, elle ne fournit pas de contre-exemples à la question 1.9.

À l'opposé, on présente une construction de métriques à courbure de Ricci strictement positive due également à L. Bérard Bergery. Notre seul apport est l'étude de leur comportement asymptotique.

PROPOSITION 1.22. — *Soit (M^n, g) une variété riemannienne complète à courbure de Ricci positive. Alors, pour tout $p \geq 3$, la variété produit $\mathbb{R}^p \times M^n$ admet une métrique explicite à courbure de Ricci strictement positive.*

De plus, si (M^n, g) est compacte plate, cette métrique a un rapport asymptotique de courbure fini et la croissance volumique est d'ordre p .

2. Cône asymptotique dans le cas non effondré

On s'intéresse ici à la géométrie asymptotique des variétés riemanniennes (M^n, g) vérifiant $\text{Ric} \geq 0$, $A(g) < +\infty$ et $\text{AVR}(g) > 0$. Le résultat principal est un théorème de régularité à l'infini (théorème 2.5) avec pour corollaire un théorème de finitude à l'infini (corollaire 2.7) dans l'esprit du théorème de finitude de Cheeger-Gromov [24]. On obtient également un théorème de rigidité pour des variétés Ricci-plates (théorème 2.9). On commence par rappeler quelques définitions et propriétés des cônes asymptotiques des variétés riemanniennes (à courbure de Ricci positive).

Soit (M^n, g) une variété riemannienne complète et $p \in M^n$. Un **cône asymptotique** de (M^n, g) en p est une limite pointée au sens de Gromov-Hausdorff, en supposant qu'elle existe, de la suite $(M^n, t_k^{-2}g, p)_k$ où $t_k \rightarrow +\infty$.

Dans la littérature, l'existence d'un cône asymptotique est généralement garantie par des hypothèses de courbure de Ricci positive. En effet, avec les mêmes notations, si $g_k := t_k^{-2}g$ et d'après le théorème de précompacité de Gromov (Proposition 5.2, Chap. 5, [25]), il s'agit de borner le rapport volumique $\text{Vol}_{g_k} B_{g_k}(q, R) / \text{Vol}_{g_k} B_{g_k}(q, r)$ avec $r < R$, indépendamment de k et indépendamment du point $q \in M^n$. Dans le cas où la courbure

de Ricci est positive, on a $\text{Ric}_{g_k} \geq 0$ pour tout k . Ainsi, une telle borne est assurée par le théorème de Bishop-Gromov. À cet égard, on mentionne deux résultats fondamentaux :

THÉORÈME 2.1 (Kasue-Guijarro-Kapovitch). — *Soit (M^n, g) une variété riemannienne complète à courbure sectionnelle positive. Alors tout cône asymptotique de (M^n, g) existe et est unique : c'est le cône métrique sur son bord idéal $M(\infty)$. De plus, $M(\infty)$ est un espace d'Alexandrov à courbure supérieure à 1.*

En particulier, le cône asymptotique d'une variété riemannienne non compacte à courbure sectionnelle positive est unique. On rappelle brièvement la définition du bord idéal : $M(\infty) = \mathcal{R}_M / \sim$ où \mathcal{R}_M est l'ensemble des demi-droites de M et où deux demi-droites γ_1 et γ_2 sont équivalentes ($\gamma_1 \sim \gamma_2$) si $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\gamma_1(t), \gamma_2(t))/t = 0$. On peut se référer à [26] pour la construction et la caractérisation de $M(\infty)$.

Dans le cas où la courbure de Ricci est positive et si la variété est non effondrée, i.e. $\text{AVR}(g) := \lim_{r \rightarrow +\infty} \text{Vol} B(p, r)/r^n > 0$, on a le théorème suivant, dû à Cheeger et Colding [10] :

THÉORÈME 2.2 (Cheeger-Colding). — *Soit (M^n, g) une variété riemannienne complète telle que $\text{Ric} \geq 0$ et $\text{AVR}(g) > 0$.*

Alors tout cône asymptotique est un cône métrique $C(X)$ sur un espace de longueur X de diamètre inférieur à π .

Cependant, même dans ce cas, on perd l'unicité : cf. Perelman [33] et le récent [28] dû à Colding et Naber.

Disons quelques mots de la nature des cônes asymptotiques des variétés à courbure de Ricci positive ayant un rapport asymptotique de courbure fini. On a le résultat très général suivant :

PROPOSITION 2.3. — *Soit (M^n, g) une variété riemannienne avec $\text{Ric} \geq 0$ et $\text{A}(g) < +\infty$. Alors tout cône asymptotique C_∞ privé de son sommet p_∞ est localement d'Alexandrov. En particulier, la dimension de Hausdorff de chaque composante connexe de $C_\infty \setminus \{p_\infty\}$ est bien définie et est un entier compris entre 0 et n .*

Preuve de la proposition 2.3. Soit (M^n, g) une variété riemannienne complète telle que $\text{Ric} \geq 0$ et $\text{A}(g) < +\infty$ et $(r_i)_i$ une suite de réels tendant vers $+\infty$. Posons $g_i := r_i^{-2}g$ et $(C_\infty, d_\infty, p_\infty) := \lim_{i \rightarrow +\infty} \text{GH}_i(M^n, g_i, p)$.

Soit $x_\infty \in C_\infty \setminus \{p_\infty\}$ et posons $\alpha_\infty := d_\infty(p_\infty, x_\infty) > 0$. Alors, si $(x_i)_i$ converge vers x_∞ , les boules $(B(x_i, \eta\alpha_\infty), r_i^{-2}g)$ Gromov-Hausdorff convergent vers $B(x_\infty, \eta\alpha_\infty)$, pour $\eta \in (0, 1)$ à préciser. D'autre part,

comme $A(g) < +\infty$, il existe $C > 0$ telle que $r_p^2(x)|\text{Rm}|(x) \leq C$ pour tout $x \in M^n$. En particulier,

$$\sup_{B_g(x_i, \eta r_p(x_i))} |\text{Rm}| \leq \frac{C}{(1-\eta)^2 r_p^2(x_i)}.$$

Par conséquent, les boules géodésiques $B_g(x_i, \eta r_p(x_i))$ sont convexes dès que

$$\eta r_p(x_i) \cdot \left(\frac{C}{(1-\eta)^2 r_p^2(x_i)} \right)^{1/2} \leq \pi/2, \quad \text{i.e. si } \eta \in \left(0, \frac{1}{1 + 2C^{1/2}/\pi} \right).$$

Ainsi, pour un tel η fixé, les boules géodésiques $(B(x_i, \eta \alpha_\infty), r_i^{-2}g)$ sont convexes à courbure uniformément bornée par $C/(1-\eta)^2$. En particulier, ce sont des espaces d’Alexandrov à courbure uniformément minorée. Donc, $B(x_\infty, \eta \alpha_\infty)$ est d’Alexandrov à courbure $\geq -C/(1-\eta)^2$ comme limite d’espaces d’Alexandrov à courbure $\geq -C/(1-\eta)^2$ (proposition 10.7.1, [6]). On conclut en invoquant les résultats fondamentaux sur les espaces d’Alexandrov. La dimension de Hausdorff d’un espace d’Alexandrov est un entier (ici inférieur à n) d’après le corollaire 6.5 de [7]. Sur chaque composante connexe, le lemme 6.3 de [7] fournit que la dimension de Hausdorff de tout voisinage est la même. \square

D’après le théorème de Cheeger-Gromoll [13], une variété riemannienne complète à courbure de Ricci positive a au plus deux bouts. Si elle a exactement deux bouts, elle est isométrique à $\mathbb{R} \times N$ avec N compacte. En particulier, son cône asymptotique est $\mathbb{R} = C(\{2pts\})$ et le cône asymptotique épointé a deux composantes connexes. Si la variété a un bout, est-ce que tout cône asymptotique épointé est connexe ?

Remarque 2.4. — Le théorème 2.5 s’occupe du cas maximal où la dimension de Hausdorff des composantes connexes des cônes asymptotiques épointés est n . La proposition 2.3 prend toute son importance dans la section 4 où l’on suppose que les dimensions de Hausdorff des composantes connexes des cônes asymptotiques épointés sont égales. D’ailleurs, la preuve de la proposition 2.3 n’utilise pas à plein le fait que la différentielle de l’exponentielle soit inversible sur chaque boule $B(x_i, \eta \alpha_\infty)$. Cette idée, due à Fukaya [22], permet de montrer qu’il existe une structure bien plus riche sur chacun des voisinages du cône asymptotique épointé. Plus précisément, le théorème 0.5 de [22] montre que chaque voisinage du cône asymptotique épointé est isométrique à $(V/G, \bar{g})$ où V est un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$, G un groupe de Lie compact dont la composante connexe contenant l’identité est un tore et V est muni d’une métrique G -invariante. Nous utiliserons cette approche à la section 4.

2.1. Géométrie asymptotique cônica lisse

Nous répondons à une question de l'article [2] dont la réponse est (peut-être) connue des spécialistes. Faute d'avoir pu trouver une référence, nous en donnons une preuve.

THÉORÈME 2.5. — *Soit (M^n, g) , $n \geq 3$, une variété riemannienne vérifiant*

$$\text{Ric} \geq 0 \quad ; \quad A(g) < +\infty \quad ; \quad \text{AVR}(g) > 0. \quad (3)$$

Alors, pour toute suite $(r_i)_i$ tendant vers $+\infty$ et $p \in M^n$, $(M^n, r_i^{-2}g, p)_i$ Gromov-Hausdorff converge (à extraction près) vers un cône métrique $(C(S_\infty), d_\infty, x_\infty)$ sur un espace de longueur S_∞ compact.

De plus, $C(S_\infty) \setminus \{x_\infty\}$ est une variété lisse munie d'une métrique g_∞ de régularité $C^{1,\alpha}$, compatible avec d_∞ et la convergence est $C^{1,\alpha}$ en dehors du sommet x_∞ . Enfin,

$$|K_{g_{S_\infty}} - 1| \leq A(g), \quad \text{au sens d'Alexandrov}, \quad (4)$$

$$\text{Vol}(S_\infty, g_{S_\infty}) = n \text{AVR}(g), \quad (5)$$

$$\text{diam}(S_\infty) \leq \pi. \quad (6)$$

Preuve. D'après la proposition 6.1 de [2], pour toute suite $(r_i)_i$ tendant vers $+\infty$ et $p \in M^n$, $(M^n, r_i^{-2}g, p)_i$ Gromov-Hausdorff-converge, à extraction près vers un espace de longueur $(M_\infty, d_\infty, x_\infty)$ avec les propriétés suivantes. L'espace épointé $M_\infty \setminus \{x_\infty\}$ est une variété munie d'un atlas $C^{2,\alpha}$ et d'une métrique $g_\infty \in C^{1,\alpha}$, pour tout $\alpha \in (0, 1)$, et $r_\infty(\cdot) := d_{g_\infty}(x_\infty, \cdot)$ vérifie au sens faible,

$$\Delta_\infty r_\infty^2 = 2n, \quad |\nabla^\infty r_\infty| = 1 \quad (7)$$

où ∇^∞ est la connexion de Levi-Civita associée à g_∞ et Δ_∞ le laplacien de la métrique g_∞ . Notons que le laplacien d'une métrique $C^{1,\alpha}$ est bien défini.

Grâce aux estimées de Schauder appliquées à la fonction lipschitzienne r_∞^2 , on peut affirmer que r_∞^2 est $C^{2,\alpha}$ pour tout $\alpha \in (0, 1)$. En particulier, cette fonction est deux fois différentiable et les égalités (7) sont valables au sens ponctuel. Ainsi, chaque niveau $r_\infty^{-1}(t)$, pour t strictement positif, est une hypersurface compacte de classe $C^{2,\alpha}$ de $M_\infty \setminus \{x_\infty\}$. Pour conclure la preuve de ce théorème, on va montrer que $g_\infty = \nabla^\infty r_\infty \otimes \nabla^\infty r_\infty + r_\infty \nabla^{2,\infty} r_\infty$ sur $M_\infty \setminus \{x_\infty\}$, i.e. $g_\infty = dr_\infty^2 + r_\infty^2 g_\infty|_{r_\infty^{-1}(1)}$ sur $M_\infty \setminus \{x_\infty\}$. Notre tâche serait plus aisée si l'on avait une convergence $C^{2,\alpha}$ de sorte que la courbure de g_∞ aurait du sens. Cela sera le cas dans la preuve du théorème 2.9. Dans le cas général,

AFFIRMATION 1. — $\forall f \in C^2(M_\infty \setminus \{x_\infty\}), \forall \phi \in C_c^2(M_\infty \setminus \{x_\infty\}), \phi \geq 0,$

$$\int_{M_\infty} \phi |\nabla^{2,\infty} f|^2 - \Delta_\infty f \operatorname{div}(\phi \nabla^\infty f) d\mu(g_\infty) \leq \int_{M_\infty} \Delta_\infty \phi \frac{|\nabla^\infty f|^2}{2} d\mu(g_\infty).$$

Preuve de l'affirmation 1. — La formule de Bochner appliquée à (M^n, g_i, p) établit que pour toutes $f \in C^3(M^n),$

$$\Delta_i \left(\frac{|\nabla^i f|^2}{2} \right) = |\nabla^{2,i} f|^2 + \operatorname{Ric}(\nabla^i f, \nabla^i f) + g_i(\nabla^i \Delta_i f, \nabla^i f),$$

où l'indice i se réfère à la métrique $g_i.$ Or, comme $\operatorname{Ric}_g \geq 0,$ on a $\operatorname{Ric}_{g_i} \geq 0$ pour tout $i,$ d'où,

$$\Delta_i \left(\frac{|\nabla^i f|^2}{2} \right) \geq |\nabla^{2,i} f|^2 + g_i(\nabla^i \Delta_i f, \nabla^i f).$$

Multiplions l'inégalité précédente par une fonction positive $\psi \in C_c^2(M^n)$ et intégrons par partie pour obtenir

$$\int_{M^n} \psi |\nabla^{2,i} f|^2 - \Delta_i f \operatorname{div}(\psi \nabla^i f) d\mu(g_i) \leq \int_{M^n} \Delta_i \psi \frac{|\nabla^i f|^2}{2} d\mu(g_i). \quad (8)$$

Par un argument de densité (en utilisant une technique de convolution), l'inégalité (8) est encore vraie pour toutes $f \in C^2(M^n)$ et $\psi \geq 0 \in C_c^2(M^n).$ Soit K un compact de $M_\infty \setminus \{x_\infty\}$ et soient $\phi_i : K \rightarrow M^n$ des difféomorphismes sur leurs images tels que la suite de métriques $(\phi_i^* g_i)_i$ converge $C^{1,\alpha}$ uniformément sur K vers $g_\infty.$ Soit $f \in C^2(M_\infty \setminus \{x_\infty\})$ et ϕ une fonction positive C^2 à support compact dans $K.$ Alors,

$$\int_K \phi |\nabla^{2,i} f|^2 - \Delta_i f \operatorname{div}(\phi \nabla^\infty f) d\mu(\phi_i^* g_i) \leq \int_K \Delta_i \phi \frac{|\nabla^i f|^2}{2} d\mu(\phi_i^* g_i),$$

où i se réfère à la métrique $\phi_i^* g_i.$ L'affirmation suit en faisant tendre i vers $+\infty.$ □

Appliquons l'affirmation 1 à $f = r_\infty^2$ et à toutes fonctions ϕ de classe C^2 positives à support compact. D'après les égalités (7), on a donc,

$$\begin{aligned} \int_{M_\infty} \phi |\nabla^{2,\infty} f|^2 - 2n \operatorname{div}(\phi \nabla^\infty f) d\mu(g_\infty) &\leq \int_{M_\infty} 2r_\infty^2 \Delta_\infty \phi d\mu(g_\infty) \\ \int_{M_\infty} \phi |\nabla^{2,\infty} f|^2 d\mu(g_\infty) &\leq \int_{M_\infty} 2r_\infty^2 \Delta_\infty \phi d\mu(g_\infty). \end{aligned} \quad (9)$$

Or, $|\nabla^{2,\infty} r_\infty^2|^2 \geq (\Delta_\infty(r_\infty^2))^2/n = 4n,$ ce qui signifie que nous avons une égalité dans l'inégalité (9). Par conséquent,

$$\begin{aligned} \nabla^{2,\infty} r_\infty^2 &= \frac{\Delta_\infty(r_\infty^2)}{n} g_\infty = 2g_\infty, \quad \text{i.e.} \\ g_\infty &= \nabla^\infty r_\infty \otimes \nabla^\infty r_\infty + r_\infty \nabla^{2,\infty} r_\infty. \end{aligned}$$

Pour estimer la courbure de l'hypersurface $S_\infty := r_\infty^{-1}(1)$, on considère les hypersurfaces lisses $S_i := (r_\infty \circ \phi_i^{-1})^{-1}(1)$ de (M^n, g_i) . Via les équations de Gauss, les courbures intrinsèques vérifient

$$\limsup_{i \rightarrow +\infty} |K_{S_i} - 1| \leq A(g). \quad (10)$$

Comme la convergence est seulement $C^{1,\alpha}$, la courbure de S_∞ n'est pas nécessairement définie. Toujours est-il que l'estimation asymptotique (10) des courbures intrinsèques des hypersurfaces S_i est vraie au sens d'Alexandrov d'après le théorème de Toponogov. Comme la convergence est $C^{1,\alpha}$, l'estimation asymptotique passe à la limite au sens d'Alexandrov, ce qui donne l'estimation (4).

Prouvons maintenant l'égalité (5).

Comme la convergence est $C^{1,\alpha}$, les formes volumes des métriques $g_i = r_i^{-2}g$ convergent vers la forme volume de g_∞ . D'une part, pour $0 < a < b$,

$$\text{Vol}_{g_\infty} A_{g_\infty}(p_\infty, a, b) = \int_a^b \text{Vol}(S_\infty, r^2 g_{S_\infty}) dr = \frac{b^n - a^n}{n} \text{Vol}(S_\infty, g_{S_\infty}).$$

D'autre part,

$$\text{Vol}_{g_\infty} A_{g_\infty}(p_\infty, a, b) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \text{Vol}_{g_i} A_{g_i}(p, a, b) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{\text{Vol}_g A_g(p, ar_i, br_i)}{r_i^n}.$$

Or, via le théorème de Bishop-Gromov et la formule de la co-aire,

$$\frac{\text{Vol}_g S(p, br_i)}{(br_i)^{n-1}} \frac{b^n - a^n}{n} \leq \frac{\text{Vol}_g A_g(p, ar_i, br_i)}{r_i^n} \leq \frac{\text{Vol}_g S(p, ar_i)}{(ar_i)^{n-1}} \frac{b^n - a^n}{n},$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\text{Vol} S(p, r)}{r^{n-1}} = n \text{AVR}(g).$$

Donc,

$$\frac{b^n - a^n}{n} \text{Vol}(S_\infty, g_{S_\infty}) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{b^n - a^n}{n} \frac{\text{Vol} S(p, br_i)}{(br_i)^{n-1}} = \frac{b^n - a^n}{n} (n \text{AVR}(g)).$$

Pour l'estimation du diamètre de la section S_∞ , on invoque le théorème 2.2. \square

Remarque 2.6. — La preuve du théorème 2.5 utilise le théorème 2.2 pour l'estimation du diamètre. On peut éviter un tel argument massue pour une preuve plus cohérente si on suppose un rapport asymptotique de courbure petit. En effet, si $A(g) < 1$, alors la courbure de Ricci de la section (en supposant que cela ait du sens) est strictement positive. On conclut alors en invoquant le théorème de Myers.

Le théorème 2.5 a pour corollaire que les bouts de telles variétés (M^n, g) ont un nombre fini de type difféomorphique dépendant seulement d'une borne inférieure du volume asymptotique $AVR(g)$ et d'une borne supérieure du rapport asymptotique de courbure $A(g)$. C'est la version non compacte du théorème de Cheeger-Gromov version $C^{1,\alpha}$ [24] pour les variétés compactes. Notons pour $v > 0, D > 0$ et λ_i réels pour $i = 1, 2$:

$$\mathfrak{M}(n, \lambda_1, \lambda_2, v, D) := \{(X^n, g) \text{ compacte t.q. } \lambda_1 \leq \text{Rm}(g) \leq \lambda_2, \\ v \leq \text{Vol}(X, g), \quad \text{diam}(X, g) \leq D\}$$

COROLLAIRE 2.7 (Théorème de finitude à l'infini). — Soit $(M^n, g), n \geq 3$, une variété riemannienne complète telle que

$$\text{Ric} \geq 0, \quad A(g) < +\infty, \quad AVR(g) > 0. \tag{11}$$

Alors, il existe un rayon $R > 0$ tel que $M^n \setminus B(p, R)$ est homéomorphe à $\mathbb{R} \times X$, où X est connexe et appartient à la fermeture pour la topologie Gromov-Hausdorff de $\mathfrak{M}(n - 1, 1 - A(g), 1 + A(g), n AVR(g), \pi)$. En particulier, il existe un nombre fini de type de difféomorphismes de X .

Preuve. Soit $p \in M^n$. Alors,

AFFIRMATION 2. — Il existe $R > 0$ tel que pour tout $r > R$, la fonction distance r_p restreinte à l'anneau métrique $A(p, r, 4r)$ est une fibration topologique de fibre appartenant à $\mathfrak{M}(n - 1, 1 - A(g), 1 + A(g), n AVR(g), \pi)$.

Démonstration. — Sinon, il existerait une suite $(r_i)_i$ tendant vers $+\infty$ tel que pour tout $i, r_p : A(p, r_i, 4r_i) \rightarrow [r_i, 4r_i]$ n'est pas une fibration topologique de fibre appartenant à $\mathfrak{M}(n - 1, 1 - A(g), 1 + A(g), n AVR(g), \pi)$. Or, à sous-suite près, $(M^n, r_i^{-2}g, p)_i$ vérifie les conclusions du théorème 2.5. En particulier, avec les notations du théorème 2.5, $r_\infty : A(x_\infty, 1/2, 5) \rightarrow [1/2, 5]$ est une fibration topologique de fibre S_∞ appartenant à $\mathfrak{M}(n - 1, 1 - A(g), 1 + A(g), n AVR(g), \pi)$.

On obtient une contradiction à la manière de [30].

Soit $\phi_i : A(x_\infty, 1/2, 5) \rightarrow M^n$ des difféomorphismes sur leurs images tels que $(\phi_i^* g_i)_i$ converge $C^{1,\alpha}$ uniformément sur $A(x_\infty, 1/2, 5)$ vers g_∞ . Or, le champ de vecteur lisse $-\nabla^\infty r_\infty$ est transversal au gradient de $r_i := d_{g_i}(p, \cdot) \circ \phi_i$ au sens de [23]. En utilisant le flot du champ de vecteur $-\nabla^\infty r_\infty$ et la propriété de la fonction r_∞ , on construit un homéomorphisme entre la section du cône (le niveau 1 de r_∞) et un niveau de r_i et on montre que r_i , restreint à $r_i^{-1}([1, 4])$, est une fibration topologique de fibre homéomorphe à la section du cône. Contradiction. \square

Pour montrer le résultat demandé, il suffit d'étendre les fibrations topologiques $r_p : A(p, r, 4r) \rightarrow [r, 4r]$ définies pour $r > R$ à $\{r_p > R\}$ tout entier.

Ici, une telle extension est possible car les projections de ces fibrations sont données par la restriction d'une même application. De plus, si X n'était pas connexe, alors M^n aurait deux bouts, ce qui entre en contradiction avec le théorème de scindement isométrique de Cheeger-Gromoll. \square

Remarque 2.8. — Si (M^n, g) est une variété riemannienne complète satisfaisant $\text{Ric} \geq 0$, $\liminf_{r_p(x) \rightarrow +\infty} K_g(x)r_p(x)^2 > -\infty$ où $K_g(x) := \inf_{\Pi \subset T_x M} K_g(\Pi)$ et $\text{AVR}(g) > 0$ alors Sha et Shen [38] montrent que M^n est de type topologique fini, i.e. que M^n privée d'un compact est homéomorphe à $N \times (0, +\infty)$ où N est une $(n-1)$ -variété. Le corollaire 2.7 précise ainsi la géométrie de N en cas de rapport asymptotique de courbure fini.

On termine cette section par un résultat de rigidité concernant les variétés Ricci-plates non effondrées ayant un rapport asymptotique de courbure universellement petit.

THÉORÈME 2.9. — *Soit (M^n, g) , $n \geq 4$ une variété riemannienne complète vérifiant*

$$\text{Ric} = 0, \quad \text{A}(g) < +\infty, \quad \text{AVR}(g) > 0.$$

Alors on peut conclure de la même façon que dans le théorème 2.5 avec une convergence C^∞ en dehors du sommet.

De plus, $(C(S_\infty) \setminus \{x_\infty\}, g_\infty)$ est Ricci-plate. En particulier, si $\text{A}(g) < 3/5$, (S_∞, g_{S_∞}) est isométrique à un quotient de $(\mathbb{S}^{n-1}, g_{std})$ et

$$\text{AVR}(g) = \frac{\omega_n}{|\pi_{1,\infty}(M^n)|}.$$

Enfin, si M^n est simplement connexe à l'infini, alors (M, g) est isométrique à l'espace euclidien.

Ce théorème nécessite quelques rappels.

Le premier résultat dû, entre autres, à M. Anderson concerne la régularité des métriques Ricci-plates. On renvoie à l'article de G. Carron [9] pour une synthèse sur le sujet. On ne cite que le résultat qui nous est directement utile, le cadre de cet article étant bien plus général.

THÉORÈME 2.10 (Anderson, Carron). — *Soit (M^n, g) une variété riemannienne complète Ricci-plate et $p \in M^n$. Alors pour tout $x \in M^n$ et tout entier k , il existe $C(n, k) > 0$ telle que,*

$$r_p(x)^{2+k} \sup_{B(x, r_p(x)/4)} |\nabla^k \text{Rm}(g)| \leq C(n, k)r_p(x)^2 \sup_{B(x, r_p(x)/2)} |\text{Rm}(g)|.$$

En particulier, si $\text{A}(g)$ est fini, alors,

$$\limsup_{r_p(x) \rightarrow +\infty} r_p(x)^{2+k} \sup_{B(x, r_p(x)/4)} |\nabla^k \text{Rm}(g)| < +\infty.$$

Enfin, nous aurons besoin d'un théorème de rigidité sur les variétés Einstein à courbure pincée dû à Brendle [5].

THÉORÈME 2.11 (Brendle). — *Soit (M^n, g) une variété riemannienne Einstein à courbure 1/4-pincée, i.e. $\max_{M^n} K / \min_{M^n} K < 4$. Alors (M^n, g) est à courbure constante.*

Nous sommes en mesure de prouver le théorème 2.9.

Preuve du théorème 2.9. Sous ces hypothèses, la conclusion du théorème 2.5 est valable. Les estimées du théorème 2.10 améliorent la convergence et prouvent que la convergence est lisse en dehors du sommet du cône asymptotique. Ainsi, $\text{Ric}_{g_\infty} \equiv 0$ en dehors du sommet et les équations de Gauss appliquées à la section du cône (S_∞, g_{S_∞}) se lisent,

$$\begin{aligned} \text{Ric}_{g_{S_\infty}} &= \text{Ric}_{g_\infty} - K_{\text{radiale}} + (n-2)g_{S_\infty}, \\ &= \text{Ric}_{g_\infty} + (n-2)g_{S_\infty} = (n-2)g_{S_\infty}. \end{aligned}$$

Grâce à l'estimation (4), la métrique g_{S_∞} est $(1 - A(g))/(1 + A(g))$ -pincée, si $A(g) < 1$, soit 1/4-pincée si $A(g) < 3/5$. En appliquant le théorème 2.11, le résultat de rigidité suit aisément. \square

3. Conditions suffisantes pour un non effondrement

3.1. Le cas de la dimension impaire

Cette section a pour but d'étudier la question 1.7.

On a le résultat suivant.

THÉORÈME 3.1. — *Soit (M^n, g) une variété riemannienne telle que*

$$n \text{ impair} \quad ; \quad K \geq 0 \quad ; \quad |\pi_1(M^n)| < +\infty \quad ; \quad A(g) < +\infty.$$

Alors

$$\text{AVR}(g) \geq \frac{\omega_n}{(1 + A(g))^{\frac{n-1}{2}}} F(A(g)),$$

où F est une fonction strictement positive telle que $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = 1$.

Remarque 3.2. — Notons que sous les hypothèses du théorème 3.1, la topologie de la variété considérée est celle de \mathbb{R}^n , que n soit pair ou impair : cf. théorème 1.3.

Ce théorème et sa démonstration s'inspire très largement des articles [21] et [19] qui s'intéressaient principalement à prouver des théorèmes de rigidité vis-à-vis de la décroissance de la courbure. Leurs arguments s'adaptent ici sans trop de modifications. On commence par rappeler la construction de la fonction de Busemann. La preuve consiste ensuite à étudier la géométrie (volume et courbure) de ses niveaux.

Selon Cheeger et Gromoll, la fonction de Busemann b d'une variété riemannienne (M^n, g) est définie par

$$b := \sup_{\gamma \in \Gamma_p} b_\gamma,$$

où Γ_p est l'ensemble des demi-droites partant de p et où

$$b_\gamma(\cdot) := \lim_{t \rightarrow +\infty} (t - d(\cdot, \gamma(t))),$$

est la fonction de Busemann associée à la demi-droite γ . On résume ses propriétés dans la proposition suivante.

PROPOSITION 3.3. — *Soit (M^n, g) une variété riemannienne complète à courbure sectionnelle positive. La fonction de Busemann vérifie alors*

1) *b est convexe et 1-lipschitz, i.e. $|b(x) - b(y)| \leq d(x, y)$ pour tout x, y dans M^n .*

2) *À une constante additive près, b est équivalente à la fonction distance r_p , plus précisément, il existe une fonction θ telle que*

$$\lim_{+\infty} \theta = 0 \quad ; \quad (1 - \theta(r_p))r_p \leq b \leq r_p.$$

On pourra trouver une preuve complète dans [19].

Notons $M_{\leq t} := b^{-1}(-\infty, t]$ le sous-niveau de b de hauteur t . La construction même de l'âme par Cheeger et Gromoll nous enseigne que,

LEMME 3.4. — *$\partial M_{\leq t} =: M_t$ est homéomorphe au fibré unitaire normal de l'âme S . En particulier, si S est un point, M_t est homéomorphe à \mathbb{S}^{n-1} .*

En général, M_t n'est pas une hypersurface lisse. Pour contourner ce problème, on approche ces hypersurfaces en lissant localement, i.e. sur un voisinage de $M_{\leq t}$, la fonction de Busemann par une technique de convolution « standard ». On en rappelle la procédure ainsi que ses propriétés fondamentales tirées de [19]. Soit $\rho : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ une fonction lisse à support dans $[-1, 1]$ telle que ρ soit constante près de 0 et

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho(|v|) d\mu = 1.$$

Définissons l'approximation locale b_δ par la formule,

$$b_\delta(x) := \frac{1}{\delta^n} \int_{T_x M^n} b(\exp_x(v)) \rho\left(\frac{|v|}{\delta}\right) d\mu(v),$$

où $d\mu(v)$ désigne la mesure de Lebesgue induite par la métrique riemannienne g sur $T_x M^n$. Selon [19],

PROPOSITION 3.5. — Soit b_δ une approximation locale de la fonction de Busemann b pour $\delta > 0$ assez petit. Alors,

(1) $|b_\delta - b| \leq \delta$, ce que l'on note $b_\delta =_\delta b$.

(2) b_δ est 1-lipschitz, i.e. $|\nabla b_\delta| \leq 1$.

(3) $\text{Hess } b_\delta \geq_\delta 0$.

(4) $|\nabla b_\delta| \geq \langle \nabla b_\delta, \nabla b \rangle \geq_\delta 1 - \theta(r_p)$,

où pour une fonction ou un 2-tenseur symétrique ϕ , $\phi \geq_\delta 0$ si $\phi \geq \psi - \epsilon(\delta)$ avec $\lim_{\delta \rightarrow 0} \epsilon(\delta) = 0$.

Remarque 3.6. — En général, on obtient seulement, par ce procédé, une fonction localement définie. En effet, on a besoin d'un contrôle du rayon d'injectivité pour qu'un tel procédé crée une fonction lisse. Ici, en cas de courbure sectionnelle positive bornée, le rayon d'injectivité de la variété est strictement positif en utilisant la rétraction de Sharafutdinov [37]. Ainsi, ce procédé fournit une fonction lisse définie globalement pour un paramètre δ borné par le rayon d'injectivité.

Malgré la régularité des hypersurfaces M_t^δ , il reste difficile d'estimer leurs courbures. Pour remédier à ce problème, on considère les niveaux de la fonction distance $d(M_t^\delta, \cdot)$. Soit $M_{\geq t}^\delta := \{x \in M | b_\delta(x) \geq t\}$ le sur-niveau de b_δ et définissons $M_{t,r}^\delta := \{x \in M_{\geq t}^\delta | d(x, M_t^\delta) = r\}$. La proposition suivante résume les informations géométriques cruciales de $M_{t,r}^\delta$.

PROPOSITION 3.7. — Soit (M^n, g) une variété riemannienne complète telle que $K \geq 0$ et $A(g) < +\infty$. Alors, avec les notations précédentes,

(1) Pour $0 \leq r \leq t\pi/(2\sqrt{A(g)})$, $M_{t,r}^\delta$ est une hypersurface lisse homéomorphe à M_t .

(2) La seconde forme fondamentale $h_{t,r}^\delta$ de $M_{t,r}^\delta$ vérifie,

$$|h_{t,r}^\delta| \leq_\delta \frac{1}{r}, \quad \text{pour tout } r \in [0, r(t)], \text{ où } r(t) := t\pi/(4\sqrt{A(g)}).$$

(3) Si n est impair et $\pi_1(M^n) = 1$,

$$\text{Vol}(M_{t,r}^\delta) \geqslant_\delta \frac{n\omega_n r^{n-1}}{(1 + A(g)/(1 + t/r)^2)^{\frac{n-1}{2}}}.$$

Preuve. Pour le (1), les points focaux de M_t^δ dans $M_{\geqslant t}^\delta$ sont à une distance supérieure à $\pi/(2\sqrt{A(g)})$. Sinon, en considérant un point focal le plus proche de M_t^δ , il existerait une géodésique lisse $\gamma : [0, l] \rightarrow M_{\geqslant t}^\delta$ telle que $b_\delta(\gamma(0)) = b_\delta(\gamma(l)) = t$ et $\gamma : (0, l) \rightarrow M_{> t}^\delta$. Par la presque-convexité de b_δ assurée par la proposition 3.5, il existe $\epsilon_\delta > 0$ tel que $B_\delta : s \rightarrow b_\delta(\gamma(s)) + \epsilon_\delta s^2/2$ est convexe. En particulier, $B_\delta(0) = t$ et $B_\delta(l) = t + \epsilon_\delta l^2/2$ et

$$\begin{aligned} B_\delta(s) &\leqslant \left(1 - \frac{s}{l}\right) B_\delta(l) + \frac{s}{l} B_\delta(0), \quad \forall s \in (0, l), \quad \text{i.e.}, \\ t + \frac{\epsilon_\delta s^2}{2} &< \left(1 - \frac{s}{l}\right) \left(t + \frac{\epsilon_\delta l^2}{2}\right) + \frac{st}{l}, \quad \text{i.e.}, \\ s^2 + ls - l^2 &< 0, \quad \forall s \in (0, l). \end{aligned}$$

En particulier, $s < (5^{1/2} - 1)l/2 < l$, ce qui est absurde. D'où le résultat. On en déduit que $M_{t,r}^\delta$ est une hypersurface lisse pour $0 \leqslant r \leqslant r(t) := t\pi/(4\sqrt{A(g)})$. Par construction de l'approximation b_δ (cf. proposition 3.5), M_t^δ est homéomorphe à M_t . De plus, ce qui précède montre que l'application $\pi_t^\delta : M_{t,r}^\delta \rightarrow M_t^\delta$ telle que $d(q, \pi_t^\delta(q)) = d(M_t, q)$ pour $q \in M_{t,r}^\delta$ est un homéomorphisme pour $0 \leqslant r \leqslant r(t)$.

Pour le (2), on applique les théorèmes de comparaison à la fonction distance $d(M_t, \cdot)$ (théorème 3.2 de [20]).

Pour le (3), on sait d'après le lemme 3.4 que $M_{t,r}^\delta$ est une $(n-1)$ -sphère. On peut donc appliquer le théorème généralisé de Gauss-Bonnet à la variété riemannienne $M_{t,r}^\delta$ munie de la métrique induite par la métrique g . Ainsi,

$$2 = \chi(M_{t,r}^\delta) = \frac{2}{\text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1})} \int_{M_{t,r}^\delta} \mathbf{K},$$

où

$$\mathbf{K} = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{i_1 < \dots < i_{n-1}} \epsilon_{i_1, \dots, i_{n-1}} \text{Rm}_{i_1, i_2} \wedge \dots \wedge \text{Rm}_{i_{n-2}, i_{n-1}},$$

où Rm est l'opérateur de courbure de la métrique induite et $\epsilon_{i_1, \dots, i_{n-1}}$ est la signature de la permutation (i_1, \dots, i_{n-1}) . Par conséquent, les équations de Gauss et l'estimation de la seconde forme fondamentale du (2), fournissent l'estimation demandée, i.e.

$$n\omega_n \leqslant_\delta \text{Vol}(M_{t,r}^\delta) \left(\frac{1}{r^2} + \frac{A(g)}{(t+r)^2} \right)^{\frac{n-1}{2}}. \quad \square$$

On est en mesure de terminer la preuve du théorème 3.1.

Preuve du théorème 3.1. D'une part,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\text{Vol } A(p, t, t + r(t))}{r(t)^n} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\text{Vol } B(p, t + r(t))}{r(t)^n} - \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\text{Vol } B(p, t)}{r(t)^n} \\ &= \text{AVR}(g) \left\{ \left(1 + \frac{4}{\pi} \sqrt{A(g)} \right)^n - \left(\frac{4}{\pi} \sqrt{A(g)} \right)^n \right\}. \end{aligned}$$

D'autre part, par construction, $M_{t,r}^\delta \subset A(p, t - \delta, (t + \delta)/(1 - \theta(t)) + r(t))$ pour $r \in [0, r(t)]$.

Par la formule de la co-aire,

$$\begin{aligned} \frac{\text{Vol } A(p, t - \delta, \frac{t+\delta}{1-\theta(t)} + r(t))}{r(t)^n} &\geq \frac{1}{r(t)^n} \int_0^{r(t)} \text{Vol } M_{t,r}^\delta dr \\ &\geq_\delta \frac{1}{r(t)^n} \int_0^{r(t)} \frac{n\omega_n r^{n-1}}{(1 + A(g)/(1 + t/r)^2)^{\frac{n-1}{2}}} dr. \end{aligned}$$

Par conséquent, si on fait tendre δ vers 0,

$$\frac{\text{Vol } A(p, t, \frac{t}{1-\theta(t)} + r(t))}{r(t)^n} \geq \int_0^1 \frac{r^{n-1} dr}{\left(1 + A(g)(1 + 4\sqrt{A(g)}/(r\pi))^{-2} \right)^{\frac{n-1}{2}}},$$

on obtient le résultat demandé en faisant tendre t vers $+\infty$. □

3.2. Contre-exemples à la question 1.7 en dimensions paires

On a vu en section 1 qu'une généralisation hâtive de la question 1.7 consistant à affaiblir les hypothèses de positivité de courbure est fautive en dimension 4. Ceci est un accident dans le cas $A(g) = 0$ d'après le théorème suivant dû à Petrunin et Tuschmann [35]. Son énoncé nécessite d'abord une définition.

Une variété non compacte riemannienne complète (M^n, g) a une **structure de cône à l'infini** s'il existe un cône métrique C de sommet o tel que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{GH}_\epsilon(M^n, \epsilon g, p) = (C, d_c, o).$$

Par exemple, les variétés à courbure sectionnelle positive ont une structure de cône à l'infini (cf. [26]).

THÉORÈME 3.8 (Petrunin-Tuschmann). — *Soit (M^n, g) une variété riemannienne complète avec $A(g) = 0$. Supposons que M^n a une structure de cône à l'infini. Alors,*

- (i) M^n a un nombre fini de bouts.
(ii) Tout bout simplement connexe est homéomorphe à $\mathbb{S}^{n-1} \times [0, +\infty)$. De plus, si tous les bouts sont simplement connexes,
(a) si $n \neq 4$, le cône asymptotique est isométrique à \mathbb{R}^n ,
(b) si $n = 4$ alors le cône asymptotique est isométrique à un des espaces suivants : \mathbb{R}^4 , \mathbb{R}^3 ou $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.

D'où la difficulté de trouver des contre-exemples à la question 1.9 en dimension différente de 4. Cependant, le théorème 3.8 ne renseigne pas en cas de rapport asymptotique de courbure arbitraire. C'est pourquoi, il semble légitime de s'intéresser aux cas des dimensions paires :

QUESTION 3.9. — *Est-ce que le théorème 3.1 est vrai si la dimension n est paire ?*

Les variétés riemanniennes de dimension paire que nous présentons ci-dessous fournissent des contre-exemples à la question 3.9. En ce sens, le théorème 3.1 est optimal. La construction s'inspire des constructions à la Berger-Cheeger dont l'archétype sont les sphères de Berger (Chap. 3, [34]). Notons qu'Unnebrink [42] a construit dans le même registre des variétés asymptotiquement plates s'effondrant à l'infini ($\text{AVR}(g) = 0$) sur \mathbb{R}^4 , mais les courbures sectionnelles ne sont pas toutes positives.

Considérons l'action de \mathbb{S}^1 sur \mathbb{C}^n définie par

$$\theta \cdot (z_1, \dots, z_n) := (e^{i\theta} z_1, \dots, e^{i\theta} z_n),$$

pour $\theta \in \mathbb{S}^1$ et $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. Cette action admet un seul point fixe : l'origine $(0, \dots, 0)$. De plus, quand on considère \mathbb{C}^n muni de sa métrique euclidienne, l'action de \mathbb{S}^1 est isométrique. Or, \mathbb{S}^1 agit par translation sur lui-même, cette action est isométrique et libre. Par conséquent, \mathbb{S}^1 agit librement et isométriquement sur le produit $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{C}^n, \bar{g})$ muni de sa métrique produit. On munit la variété quotient d'une métrique riemannienne telle que la projection $\pi : (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{C}^n, \bar{g}) \rightarrow (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{C}^n / \mathbb{S}^1, g)$ est une submersion riemannienne. On affirme que ces variétés sont des contre-exemples à la question 3.9. Plus précisément,

PROPOSITION 3.10. — *Les variétés riemanniennes $(M^{2n}, g) := (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{C}^n / \mathbb{S}^1, g)$ décrites précédemment vérifient*

$$K \geq 0 \quad ; \quad A(g) = 3 \quad ; \quad \text{AVR}(g) = 0 \quad ; \quad M^{2n} \simeq_{\text{diff}} \mathbb{R}^{2n}.$$

Preuve. Pour le type topologique, puisque \mathbb{S}^1 agit librement sur $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{C}^n$, observons que l'application $\mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow M^{2n}$ est une bijection. En

ce sens, M^{2n} est difféomorphe à \mathbb{R}^{2n} . La formule de O’Neill appliquée à cette submersion riemannienne donne

$$K_g(X, Y) = K_{\bar{g}}(\bar{X}, \bar{Y}) + \frac{3}{4} |[\bar{X}, \bar{Y}]^\nu|_{\bar{g}}^2,$$

où X et Y sont tangents à M^{2n} et \bar{X} et \bar{Y} sont des relevés horizontaux de X et Y , l’exposant ν désignant la composante verticale. Comme \bar{g} est plate, la courbure de g se réduit à

$$K_g(X, Y) = \frac{3}{4} |[\bar{X}, \bar{Y}]^\nu|_{\bar{g}}^2 \geq 0.$$

Pour le calcul du rapport asymptotique de courbure, l’argument doit être raffiné. Remarquons d’abord que si p est un point différent de l’origine $0 \in \mathbb{R}^{2n}$, seul point fixé par \mathbb{S}^1 , les vecteurs ν_p tangents à l’action de \mathbb{S}^1 sur \mathbb{C}^n sont la composante verticale tangente à M^{2n} . Ainsi, les vecteurs horizontaux \mathcal{H}_p pour l’action de \mathbb{S}^1 sur \mathbb{C}^n sont aussi horizontaux pour l’action de \mathbb{S}^1 sur $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{C}^n$. Soit V le vecteur tangent unitaire à l’action de \mathbb{S}^1 . Alors, $V = i\partial_r$. De plus, la métrique euclidienne sur \mathbb{R}^{2n} est eucl = $dr^2 + r \text{Hess } r$. Donc, en utilisant la proposition 13 de [34],

$$\begin{aligned} K_g(X, Y) &= \frac{3}{4} \langle [\bar{X}, \bar{Y}], V \rangle^2 = 3 \langle \nabla_{\bar{X}} \bar{Y}, V \rangle^2 \\ &= 3 \langle \bar{Y}, \nabla_{\bar{X}} V \rangle^2 = 3 \langle \bar{Y}, i \nabla_{\bar{X}}(iV) \rangle^2 = 3(\text{Hess } r(i\bar{X}, \bar{Y}))^2 \\ &= \frac{3}{r_0(p)^2} \langle \bar{Y}, i\bar{X} \rangle^2 \leq \frac{3}{r_0(p)^2} |\bar{X}|^2, \quad \text{avec égalité si } \bar{Y} = i\bar{X}, \end{aligned}$$

où X et Y sont dans \mathcal{H}_p orthogonaux à ∂_r . Si $Y = \partial_r$ et $X \in \mathcal{H}_p$ alors le raisonnement précédent montre que $K_g(X, \partial_r) = 0$. De même,

$$\begin{aligned} K_g(X, V) &= \frac{3}{4} \langle [\bar{X}, V], V \rangle^2 = \frac{3}{4} \langle \nabla_{\bar{X}} V - \nabla_V \bar{X}, V \rangle^2 \\ &= \frac{3}{4} \langle \nabla_{\bar{X}} V + \nabla_{\bar{X}} V, V \rangle^2 = 3(\text{Hess } r(\bar{X}, \partial_r))^2 = 0, \end{aligned}$$

car $\nabla_{\partial_r} \partial_r = 0$. Ainsi, on a $A(g) = 3$.

Concernant l’effondrement volumique, on montre un peu plus.

\mathbb{S}^1 agit isométriquement sur les demi-droites d’origine $(e, 0) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{C}^n$. Cette action est libre. En effet, s’il existe $\theta \in \mathbb{S}^1$ tel que $\theta \cdot [\gamma] = [\gamma]$, où $\gamma(t) = tv$, pour $t \in [0, +\infty)$ et $v \in \mathbb{C}^n$ unitaire, est une demi-droite, alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\theta \cdot \gamma(t), \gamma(t))/t = 0$, soit $|\theta \cdot v - v| = 0$, soit $\theta = 0$. Dans ce cas, on peut conclure comme dans [29] : la sphère à l’infini de (M^{2n}, g) est le quotient de la sphère à l’infini de celle de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{C}^n$ quotientée par l’action de \mathbb{S}^1 . Ainsi, le cône asymptotique de (M^{2n}, g) est $(C(\mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1), d_c)$, i.e. $(C(\mathbb{C}\mathbb{P}^n), d_c)$, puisque l’action de \mathbb{S}^1 sur \mathbb{S}^{2n+1} est exactement celle qui

engendre la fibration de Hopf métrique $\mathbb{S}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$. En particulier, le cône asymptotique est effondré, donc $\text{AVR}(g) = 0$. \square

4. Effondrement en dimension 3

On se concentre dans cette section sur la question 1.9 en dimension 3 :

QUESTION 4.1. — *Soit (M^3, g) une variété riemannienne complète simplement connexe (à l'infini) telle que $\text{Ric} \geq 0$ et $A(g) < +\infty$. A t-on $\text{AVR}(g) > 0$?*

Rappelons qu'une variété M non compacte est simplement connexe à l'infini si pour tout compact $K \subset M$, il existe un compact $K \subset K'$ tel que $M \setminus K'$ est simplement connexe. Considérons alors quelques exemples de 3-variétés riemanniennes (M^3, g) telles que $\text{Ric} \geq 0$ et $A(g) < +\infty$:

- $\text{Ric} \equiv 0$. Soit encore \mathbb{R}^3/Γ où Γ est un groupe de Bieberbach de rang 0, 1 ou 2.
- $\dim \ker \text{Ric} = 1$. Tout produit métrique $(\mathbb{R} \times \Sigma^2)/\Gamma$ où Σ^2 est une surface munie d'une métrique (de révolution) à courbure strictement positive ayant un rapport asymptotique de courbure fini et où Γ agit par translations sur \mathbb{R} et éventuellement par rotations sur Σ^2 . Si on prend comme surface le soliton cigare, la métrique est asymptotique à celle de $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2$. Si on prend comme surface un soliton gradient expansif à courbure positive, la métrique est asymptotique à celle de $C(\mathbb{S}^1) \times \mathbb{S}^1$ où $C(\mathbb{S}^1)$ est un cône métrique sur un cercle de diamètre inférieur à π . On remarque que dans les deux cas, le rapport asymptotique de courbure est nul.
- $\dim \ker \text{Ric} = 0$, i.e. $\text{Ric} > 0$. Des exemples qui sont également des singularités du flot de Ricci sont les solitons gradients expansifs rencontrés dans les exemples 1.15. Ces exemples sont tous asymptotiques à un cône métrique sur une sphère euclidienne de diamètre inférieur (strictement dans le cas non plat) à π .

On voit que les seuls exemples simplement connexes ont un rapport asymptotique volumique strictement positif.

Remarque 4.2. — Le théorème 3.1 répond à la question 4.1 par l'affirmative sous l'hypothèse plus forte de courbure sectionnelle positive.

Notons qu'en faisant évoluer par le flot de Ricci une métrique g complète à courbure bornée et à courbure de Ricci positive sur une 3-variété M^3 (condition préservée seulement en dimension 3), le théorème du principe du maximum fort [17] appliqué au tenseur de Ricci permet de nous ramener aux trois cas ci-dessus.

On répond positivement à la question 1.9, modulo une hypothèse technique, que l'on espère lever par la suite. On fera désormais l'hypothèse (\mathcal{H}) suivante :

Tous les cônes asymptotiques de (M^3, g) ont la même dimension locale de Hausdorff.

Cette dimension (entière) commune sera notée par la suite $n_\infty \in [1, n]$.

Notons que la condition (\mathcal{H}) est toujours vérifiée pour une variété riemannienne à courbure sectionnelle positive : cf. théorème 2.1. L'hypothèse (\mathcal{H}) peut-être interprétée comme une hypothèse d'effondrement (si $n_\infty < n$) uniforme de la géométrie asymptotique. Néanmoins, il existe certains exemples construits par Cheeger et Colding qui mettent en défaut l'hypothèse (\mathcal{H}). L'exemple 8.94 de [11] construit une métrique à courbure de Ricci strictement positive sur \mathbb{R}^8 ayant pour cône asymptotique $dr^2 + \lambda^2 r^2 g_{\mathbb{S}^4}/2$ avec λ pouvant varier dans $(0, 1]$. Par conséquent, la demi-droite ($\lambda = 0$) est un cône asymptotique pour cette métrique. Dans quelle mesure ces exemples sont pathologiques ?

THÉORÈME 4.3. — *Soit (M^3, g) une variété riemannienne complète simplement connexe à l'infini telle que $\text{Ric} \geq 0$ et $A(g) < +\infty$. Supposons que l'hypothèse (\mathcal{H}) soit vérifiée. Alors (M^3, g) est non effondrée, i.e. $\text{AVR}(g) > 0$.*

Remarque 4.4. — L'article [31] construit une métrique g sur \mathbb{R}^3 telle que $A(g) < +\infty$ et $\lim_{r \rightarrow +\infty} \text{Vol } B(p, r)/r^3 = 0$ pour p fixé. Le théorème 4.3 est en partie motivé par la construction d'une telle métrique.

La preuve du théorème 4.3 se fait par contradiction. Elle utilise de manière essentielle les techniques développées dans [12] pour étudier les effondrements des variétés riemanniennes à courbures uniformément bornées. Cette approche nécessite la régularisation de la métrique initiale pour pouvoir travailler sur le fibré des repères. Cette régularisation ne préserve pas la positivité de la courbure de Ricci, l'essentiel est qu'elle préserve l'hypothèse (\mathcal{H}). L'introduction du fibré des repères permet de rester dans un cadre lisse. En effet, notre situation nous amène à considérer des actions isométriques locales sur la variété privée d'un compact. Ces actions isométriques

ne sont pas nécessairement libres. Cependant elles le deviennent lorsque l'on étudie ces actions sur le fibré des repères de la variété privée d'un compact. On construit alors une fibration lisse globale en cercle (resp. en 2-tores) sur le fibré des repères de la variété privée d'un compact si $n_\infty = 2$ (resp. si $n_\infty = 1$). Ensuite, on étudie la fibration singulière canonique sur la variété à l'infini au sens de Rong [36] induite par la fibration sur le fibré des repères de la variété privée d'un compact. En utilisant la simple connexité à l'infini de la variété, on se ramène à une action globale isométrique en cercles ou en 2-tores sur la variété à l'infini. On obtient alors une contradiction par des considérations topologiques. Les détails sont présentés dans [18].

5. Perspectives

On se propose ici de résumer quelques questions laissées en suspens : elles représentent des perspectives à plus ou moins long terme pour l'auteur.

QUESTION 5.1. — *Peut-on trouver des variétés vérifiant (1) et présentant un effondrement d'ordre minimal qui ne satisfont pas la condition (2) ?*

En utilisant les méthodes de Cheeger, Fukaya et Gromov ainsi que le résultat de Sormani [41], il semble qu'une métrique à courbure de Ricci positive, ayant un rapport asymptotique de courbure fini et une croissance volumique linéaire soit homéomorphe à l'infini à $\mathbb{R} \times N$ où N est une nilvariété. Peut-on effectivement construire de telles métriques sur un tel bout où N serait une nilvariété non plate ? On remarque que c'est impossible si la courbure sectionnelle est positive.

Dans le même genre, Belegradek et Wei [3] ont construit des métriques à courbure de Ricci strictement positive sur $\mathbb{R}^k \times N$ où N est une nilvariété et k un entier assez grand. La métrique sur le facteur \mathbb{R}^k est de type parabolöide, ainsi, le rapport asymptotique de courbure est infini. D'où la

QUESTION 5.2. — *Soit (M^n, g) une variété riemannienne complète telle que $\text{Ric} \geq 0$ et $A(g) < +\infty$. M^n a-t-elle un groupe fondamental quasi-abélien ?*

Cette question est l'exacte analogue du théorème de Cheeger-Gromoll qui affirme qu'une variété riemannienne compacte à courbure de Ricci positive a un groupe fondamental quasi-abélien [14].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. T. ANDERSON, « Short geodesics and gravitational instantons », *J. Differential Geom.* **31** (1990), n° 1, p. 265-275.
- [2] S. BANDO, A. KASUE & H. NAKAJIMA, « On a construction of coordinates at infinity on manifolds with fast curvature decay and maximal volume growth », *Invent. Math.* **97** (1989), n° 2, p. 313-349.
- [3] I. BELEGRADEK & G. WEI, « Metrics of positive Ricci curvature on vector bundles over nilmanifolds », *Geom. Funct. Anal.* **12** (2002), n° 1, p. 56-72.
- [4] L. BÉRARD-BERGERY, « Sur de nouvelles variétés riemanniennes d'Einstein », in *Institut Élie Cartan, 6*, Inst. Élie Cartan, vol. 6, Univ. Nancy, Nancy, 1982, p. 1-60.
- [5] S. BRENDLE & R. SCHOEN, « Sphere theorems in geometry », in *Surveys in differential geometry. Vol. XIII. Geometry, analysis, and algebraic geometry : forty years of the Journal of Differential Geometry*, Surv. Differ. Geom., vol. 13, Int. Press, Somerville, MA, 2009, p. 49-84.
- [6] D. BURAGO, Y. BURAGO & S. IVANOV, *A course in metric geometry*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 33, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001, xiv+415 pages.
- [7] Y. BURAGO, M. GROMOV & G. PEREL'MAN, « A. D. Aleksandrov spaces with curvatures bounded below », *Uspekhi Mat. Nauk* **47** (1992), n° 2(284), p. 3-51, 222.
- [8] H.-D. CAO, « Limits of solutions to the Kähler-Ricci flow », *J. Differential Geom.* **45** (1997), n° 2, p. 257-272.
- [9] G. CARRON, « Some old and new results about rigidity of critical metric », *ArXiv e-prints* (2010).
- [10] J. CHEEGER & T. H. COLDING, « Lower bounds on Ricci curvature and the almost rigidity of warped products », *Ann. of Math. (2)* **144** (1996), n° 1, p. 189-237.
- [11] ———, « On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. I », *J. Differential Geom.* **46** (1997), n° 3, p. 406-480.
- [12] J. CHEEGER, K. FUKAYA & M. GROMOV, « Nilpotent structures and invariant metrics on collapsed manifolds », *J. Amer. Math. Soc.* **5** (1992), n° 2, p. 327-372.
- [13] J. CHEEGER & D. GROMOLL, « The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature », *J. Differential Geometry* **6** (1971/72), p. 119-128.
- [14] ———, « On the structure of complete manifolds of nonnegative curvature », *Ann. of Math. (2)* **96** (1972), p. 413-443.
- [15] J. CHEEGER & G. TIAN, « Curvature and injectivity radius estimates for Einstein 4-manifolds », *J. Amer. Math. Soc.* **19** (2006), n° 2, p. 487-525 (electronic).
- [16] C.-W. CHEN & A. DERUELLE, « Structure at infinity of expanding gradient Ricci soliton », *ArXiv e-prints* (2011).
- [17] B. CHOW, P. LU & L. NI, *Hamilton's Ricci flow*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 77, American Mathematical Society, Providence, RI, 2006, xxxvi+608 pages.
- [18] A. DERUELLE, *Géométrie à l'infini de certaines variétés riemanniennes non compactes*, Mémoire, Université de Grenoble I, 2012.
- [19] G. DREES, « Asymptotically flat manifolds of nonnegative curvature », *Differential Geom. Appl.* **4** (1994), n° 1, p. 77-90.

- [20] J.-H. ESCHENBURG, « Comparison theorems and hypersurfaces », *Manuscripta Math.* **59** (1987), n° 3, p. 295-323.
- [21] J.-H. ESCHENBURG, V. SCHROEDER & M. STRAKE, « Curvature at infinity of open nonnegatively curved manifolds », *J. Differential Geom.* **30** (1989), n° 1, p. 155-166.
- [22] K. FUKAYA, « A boundary of the set of the Riemannian manifolds with bounded curvatures and diameters », *J. Differential Geom.* **28** (1988), n° 1, p. 1-21.
- [23] R. E. GREENE & K. SHIOHAMA, « Convex functions on complete noncompact manifolds : topological structure », *Invent. Math.* **63** (1981), n° 1, p. 129-157.
- [24] R. E. GREENE & H. WU, « Lipschitz convergence of Riemannian manifolds », *Pacific J. Math.* **131** (1988), n° 1, p. 119-141.
- [25] M. GROMOV, *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, english éd., Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2007, Based on the 1981 French original, With appendices by M. Katz, P. Pansu and S. Semmes, Translated from the French by Sean Michael Bates, xx+585 pages.
- [26] L. GUIJARRO & V. KAPOVITCH, « Restrictions on the geometry at infinity of non-negatively curved manifolds », *Duke Math. J.* **78** (1995), n° 2, p. 257-276.
- [27] L. GUIJARRO & P. PETERSEN, « Rigidity in non-negative curvature », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **30** (1997), n° 5, p. 595-603.
- [28] T. HOLCK COLDING & A. NABER, « Characterization of Tangent Cones of Noncollapsed Limits with Lower Ricci Bounds and Applications », *ArXiv e-prints* (2011).
- [29] A. KASUE, « A compactification of a manifold with asymptotically nonnegative curvature », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **21** (1988), n° 4, p. 593-622.
- [30] J. LOTT, « Manifolds with quadratic curvature decay and fast volume growth », *Math. Ann.* **325** (2003), n° 3, p. 525-541.
- [31] J. LOTT & Z. SHEN, « Manifolds with quadratic curvature decay and slow volume growth », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **33** (2000), n° 2, p. 275-290.
- [32] V. MINERBE, « On the asymptotic geometry of gravitational instantons », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* **43** (2010), n° 6, p. 883-924.
- [33] G. PERELMAN, « A complete Riemannian manifold of positive Ricci curvature with Euclidean volume growth and nonunique asymptotic cone », in *Comparison geometry (Berkeley, CA, 1993-94)*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 30, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, p. 165-166.
- [34] P. PETERSEN, *Riemannian geometry*, second éd., Graduate Texts in Mathematics, vol. 171, Springer, New York, 2006, xvi+401 pages.
- [35] A. PETRUNIN & W. TUSCHMANN, « Asymptotical flatness and cone structure at infinity », *Math. Ann.* **321** (2001), n° 4, p. 775-788.
- [36] X. RONG, « On the fundamental groups of manifolds of positive sectional curvature », *Ann. of Math. (2)* **143** (1996), n° 2, p. 397-411.
- [37] V. A. ŠARAFUTDINOV, « The Pogorelov-Klingenberg theorem for manifolds that are homeomorphic to \mathbf{R}^n », *Sibirsk. Mat. Ž.* **18** (1977), n° 4, p. 915-925, 958.
- [38] J. SHA & Z. SHEN, « Complete manifolds with nonnegative Ricci curvature and quadratically nonnegatively curved infinity », *Amer. J. Math.* **119** (1997), n° 6, p. 1399-1404.
- [39] Z. SHEN & C. SORMANI, « The topology of open manifolds with nonnegative Ricci curvature », *Commun. Math. Anal.* (2008), n° Conference 1, p. 20-34.
- [40] W.-X. SHI, « Complete noncompact three-manifolds with nonnegative Ricci curvature », *J. Differential Geom.* **29** (1989), n° 2, p. 353-360.

- [41] C. SORMANI, « The almost rigidity of manifolds with lower bounds on Ricci curvature and minimal volume growth », *Comm. Anal. Geom.* **8** (2000), n° 1, p. 159-212.
- [42] S. UNNEBRINK, « Asymptotically flat 4-manifolds », *Differential Geom. Appl.* **6** (1996), n° 3, p. 271-274.

Alix DERUELLE
Institut Fourier,
Université de Grenoble I
38402 Saint-Martin d'Hères,
France
alix.deruelle@ujf-grenoble.fr