

Institut Fourier — Université de Grenoble I

Actes du séminaire de
**Théorie spectrale
et géométrie**

Julien CORTIER

Principe de recollement des équations des contraintes en relativité générale

Volume 30 (2011-2012), p. 21-45.

[<http://tsg.cedram.org/item?id=TSG_2011-2012__30__21_0>](http://tsg.cedram.org/item?id=TSG_2011-2012__30__21_0)

© Institut Fourier, 2011-2012, tous droits réservés.

L'accès aux articles du Séminaire de théorie spectrale et géométrie (<http://tsg.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://tsg.cedram.org/legal/>).

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>

PRINCIPE DE RECOLLEMENT DES ÉQUATIONS DES CONTRAINTES EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE

Julien Cortier

RÉSUMÉ. — La méthode de « recollement » permettant de trouver des solutions des équations des contraintes relativistes est décrite. En particulier, on expose la méthode de Corvino-Schoen pour construire des familles de solutions sur une variété non-compacte avec géométrie prescrite sur un bout asymptotique, en insistant sur le recollement « non-localisé ». Une liste de résultats obtenus par divers auteurs à partir de telles techniques est alors fournie, incluant la question du recollement de métriques riemanniennes en préservant leur courbure scalaire (constante). On donne enfin certaines applications en analyse géométrique et en relativité générale.

ABSTRACT. — The “gluing” method to find solutions to the relativistic constraint equations is reviewed. In particular, we describe the Corvino-Schoen method to construct families of solutions on a non-compact manifold with prescribed geometry on an asymptotic end, with emphasis on the “non-localized” gluing. We then provide a list of results obtained by various authors using such techniques, including the question of gluing Riemannian metrics while preserving their (constant) scalar curvature. We eventually give some applications in geometric analysis and in general relativity.

1. Les équations des contraintes de la relativité générale

La relativité générale, formulée par A. Einstein en 1915, est la théorie moderne de la gravitation. Elle affirme que l'ensemble des interactions physiques, gravitationnelles ou non-gravitationnelles s'exerçant dans l'Univers, sont directement reliées à la géométrie de celui-ci, notamment à sa courbure, selon les *équations d'Einstein*. Ce lien a entraîné depuis près d'un siècle un fort intérêt tant des physiciens que des mathématiciens pour des questions liées à la relativité générale.

Mots-clés : relativité générale, formulation de Cauchy, équations des contraintes, recollement.

Classification math. : 58J05, 83C05, 53C21, 53C50.

La formulation de cette théorie est en premier lieu géométrique, l'objet géométrique au coeur de la théorie étant l'*espace-temps*. Dans la suite, n désigne un entier supérieur ou égal à 3.

DÉFINITION 1.1. — Une **variété lorentzienne** est un couple (\mathcal{M}, \bar{g}) , où \mathcal{M} est une variété différentielle de classe C^∞ de dimension $n + 1$ et \bar{g} est un champ de formes bilinéaires symétriques de signature $(n, 1)$.

En particulier, le tenseur \bar{g} est non-dégénéré ; l'usage fait qu'on le nomme souvent de manière abusive « métrique » lorentzienne, bien qu'il ne soit pas défini-positif. Il est possible d'étendre cette définition à des variétés ayant un ordre plus bas de régularité (par exemple C^2), mais nous conserverons l'hypothèse C^∞ par souci de simplification. La définition d'un espace-temps se déduit alors de celle d'une variété lorentzienne comme suit :

DÉFINITION 1.2. — Une variété lorentzienne (\mathcal{M}, \bar{g}) est un **espace-temps** si \mathcal{M} est une variété orientée, et s'il existe un champ de vecteurs X tangent à \mathcal{M} tel que $\bar{g}(X, X)$ est strictement négatif en tout point de \mathcal{M} .

Un tel champ de vecteurs est dit « de genre temps » ; il garantit l'existence d'une orientation globale sur (\mathcal{M}, \bar{g}) , distinguant une partie « future » d'une partie « passée » du cône isotrope pour \bar{g} de chaque espace tangent à \mathcal{M} .

L'exemple mathématique le plus simple et le plus célèbre d'espace-temps est l'*espace-temps de Minkowski* $\mathbb{R}^{n,1}$, défini par

$$\mathbb{R}^{n,1} = (\mathbb{R}^{n+1}, \eta = -dt^2 + (dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2) .$$

Dans cet exemple, le champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial t}$ (également noté ∂_t) est de genre temps, avec $\eta(\partial_t, \partial_t) = -1$.

La relativité générale porte plus particulièrement sur la classe des espace-temps (\mathcal{M}, \bar{g}) solutions des **équations d'Einstein**. Celles-ci s'écrivent :

$$\text{Ric}_{\bar{g}} - \frac{1}{2}R_{\bar{g}}\bar{g} + \Lambda\bar{g} = \kappa T , \tag{1}$$

où $\text{Ric}_{\bar{g}}$ et $R_{\bar{g}}$ désignent respectivement le tenseur de courbure de Ricci et la courbure scalaire de \bar{g} , T est le tenseur d'« énergie-impulsion » dépendant directement des interactions physiques considérées dans la théorie (électromagnétisme, poussière, fluide, etc...) tandis que Λ et κ sont des constantes. La constante Λ est appelée *constante cosmologique* et son signe joue un rôle crucial comme nous le verrons à la Section 3. Dans la suite, nous nous restreindrons au cas des *équations d'Einstein du vide*, obtenues en choisissant $T \equiv 0$ (autrement dit en ne s'intéressant qu'aux interactions

purement gravitationnelles). On peut alors réécrire (1) comme :

$$\text{Ric}_{\bar{g}} = \frac{2\Lambda}{n-1} \bar{g} . \tag{2}$$

Si l'on vérifie immédiatement que l'espace-temps de Minkowski est bien solution de (2) pour $\Lambda = 0$, d'autres solutions sont connues, notamment la famille de Kottler-Schwarzschild (\mathcal{M}_m, g_m) , prenant la forme locale :

$$g_m = -V^2(r)dt^2 + \frac{dr^2}{V^2(r)} + r^2\sigma_{n-1} , \tag{3}$$

où $V^2(r) = 1 - \frac{2m}{r^{n-2}} - \frac{2\Lambda}{n(n-1)}r^2$, σ_{n-1} est la métrique standard de \mathbb{S}^{n-1} et \mathcal{M}_m est difféomorphe à $\mathbb{R} \times I \times \mathbb{S}^{n-1}$ pour un certain intervalle I de \mathbb{R} où V^2 est strictement positif. Le paramètre m est la *masse* de la métrique, nous reviendrons sur cette notion.

De nombreuses autres familles de solutions sont connues explicitement, elles apparaissent en général en réécrivant les équations d'Einstein sous des hypothèses de symétrie ou de comportement asymptotique dans le cas non compact. Dans d'autres cas, il existe des méthodes pour montrer l'existence de « grandes » familles de solutions lorsqu'on impose qu'elles sont asymptotiques à un certain modèle à l'infini. Nous adoptons ce point de vue dans ce qui suit. Mais nous allons voir dans un premier temps que l'on peut ramener le problème à la résolution d'une certaine équation géométrique sur une variété riemannienne, les **équations des contraintes**.

Soit M une variété lisse, de dimension n . On appelle **données initiales** sur M un couple (g, k) , où g est une métrique riemannienne sur M , et k un $(0, 2)$ -tenseur symétrique sur M . Typiquement, on peut interpréter M comme étant une hypersurface de (\mathcal{M}, \bar{g}) de genre espace, g et k étant respectivement la première et la seconde forme fondamentale induites par \bar{g} sur M . Si (\mathcal{M}, \bar{g}) est solution de (2), les formules de Gauss-Codazzi entraînent que (g, k) vérifie les équations des contraintes :

$$\Phi(g, k) := \begin{pmatrix} R(g) - 2\Lambda - |k|_g^2 + (\text{tr}_g k)^2 \\ 2(\text{div}_g k - d(\text{tr}_g k)) \end{pmatrix} = 0 . \tag{4}$$

L'équation (4) fait seulement intervenir des quantités définies sur M . On peut dès lors considérer le problème de trouver, étant donnée une variété quelconque M de dimension n , une métrique riemannienne g et un tenseur symétrique k satisfaisant cette équation. De plus, si (g, k) est solution de (4), alors il existe un espace-temps (\mathcal{M}, \bar{g}) , solution de (2), admettant g et

k comme première et seconde formes fondamentales induites sur une hypersurface M de genre espace. Ce résultat essentiel, établi par Y. Choquet-Bruhat [25] et complété par Y. Choquet-Bruhat et R. Geroch [7], est la raison d'être de l'étude des équations des contraintes.

Il est intéressant de noter que si l'on se restreint à des données initiales de la forme $(g, 0)$, correspondant à une hypersurface M totalement géodésique de (\mathcal{M}, \bar{g}) , on est alors ramené à résoudre l'équation

$$R(g) = 2\Lambda, \quad (5)$$

qui a été abondamment étudiée en géométrie riemannienne, notamment dans le cas compact, faisant par exemple l'objet du *problème de Yamabe*, voir [31]. Pour une telle hypersurface M , on dit aussi que M est *symétrique en temps*. Cette terminologie provient du fait que la solution maximale de Choquet-Bruhat-Geroch [7] avec de telles données initiales est symétrique par renversement du temps $t \leftarrow -t$.

À noter que (5) apparaît aussi en étudiant des données initiales de la forme (g, cg) où c est une constante. L'exemple le plus célèbre est le *modèle hyperboloïdal* de l'espace hyperbolique \mathbb{H}^n : il est obtenu en considérant l'hypersurface suivante (nappe supérieure de l'hyperboloïde) dans l'espace de Minkowski :

$$\mathbb{H}^n = \{x = (x^0, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^{n,1} \mid \eta(x, x) = -1, x^0 > 0\}.$$

Les données initiales induites sur \mathbb{H}^n s'écrivent ainsi (g, g) , où g est la métrique hyperbolique, à courbure scalaire $R(g) = -n(n-1)$.

De même que l'on connaît certaines familles explicites de solutions aux équations d'Einstein (2), on obtient par projection de celles-ci sur une hypersurface de genre espace des familles explicites de solutions aux équations des contraintes (4).

D'autres méthodes ont été développées pour fournir de grandes familles de solutions à (4), notamment la *méthode conforme*, dont on trouvera une description dans [4] ou encore dans [27], ainsi que dans les références de ces articles.

Cette méthode, tout comme la *méthode de recollement* dont il est question ici, fournit des résultats d'existence, mais pas de constructions explicites de solutions.

La méthode de recollement s'applique notamment au cas de données initiales (g, k) , définies sur une variété M non-compacte, dont la géométrie sur un bout est asymptotique à celles d'une certaine référence et qui sont déjà solutions des équations des contraintes (4). Cette étude est motivée en relativité générale par l'étude de systèmes gravitationnels *isolés*, pour lesquels

l'hypothèse naturelle est d'approcher la géométrie de référence à l'infini. Le but de cette méthode est, à partir de ces solutions de (4), d'en construire de nouvelles, coïncidant avec (g, k) sauf dans la région asymptotique où l'on souhaite les voir coïncider avec des données initiales « modèles ».

L'intérêt de tels résultats est de pouvoir approcher des données initiales ayant un comportement asymptotique calqué sur une référence (comme les données initiales de l'espace-temps de Minkowski, *etc*) par d'autres, qui coïncident *exactement* avec un certain modèle. Ce dernier peut toutefois appartenir à une famille plus large que la référence.

Dans la Section 2, nous exposerons le principe de la méthode de recollement, tel qu'introduit par J. Corvino et R.M. Schoen, et les résultats les plus marquants. Nous verrons dans certains cas qu'une obstruction apparaît, due aux propriétés de l'opérateur des contraintes, et qu'elle ne permet pas d'assurer le recollement directement avec la référence. Un moyen de contourner cette obstruction est d'utiliser une *famille* de modèles à l'infini suffisamment grande et munie de certaines propriétés, dont on dira qu'elle est *admissible*.

À la Section 3, nous passerons en revue une liste de résultats obtenus à l'aide de la méthode générale exposée à la Section 2. Ces résultats dépendent notablement de la géométrie imposée à l'infini pour le recollement non-localisé. Nous verrons comment de tels résultats de recollement permettent une simplification considérable et une meilleure compréhension de la géométrie à l'infini de données initiales. En particulier sera évoqué le *Théorème de masse positive*, affirmant que si une variété riemannienne (M, g) asymptotiquement euclidienne et complète est à courbure scalaire positive, alors un certain invariant, la *masse*, mesurant à l'ordre le plus bas la déviation par rapport à la métrique euclidienne, est elle-même positive et nulle si et seulement si (M, g) est l'espace euclidien.

2. Recollement de données initiales selon J. Corvino et R. Schoen

Commençons avec une définition de la notion « être asymptotique à », utilisée de manière récurrente dans ce qui suit :

DEFINITION 2.1. — Soient (M, g, k) et (M_0, g_0, k_0) des triplets de données initiales non-compactes. On dit que (M, g, k) est asymptotique à

(M_0, g_0, k_0) (ou que (g, k) est asymptotique à (g_0, k_0)) s'il existe des compacts $K \subset M$, $K_0 \subset M_0$, et un difféomorphisme

$$\phi : M_0 \setminus K_0 \longrightarrow M \setminus K$$

tels que les quantités $\phi^*g - g_0$ et $\phi^*k - k_0$ tendent vers 0 à l'infini.

Une définition plus précise peut être donnée au cas par cas en mentionnant la topologie sous laquelle on a convergence de $\phi^*g - g_0$ et $\phi^*k - k_0$ vers 0 à l'infini suivant le choix des données de référence (M_0, g_0, k_0) .

Le but de cette section est d'apporter des réponses au problème suivant :

Étant donné un triplet de données initiales (M, g, k) sur une variété M non-compacte, solution des contraintes (4) et asymptotique à des données initiales (g_0, k_0) sur un bout de M , peut-on trouver de nouvelles données initiales (\tilde{g}, \tilde{k}) sur M , coïncidant avec (g_0, k_0) à l'infini d'une part, avec (g, k) loin de l'infini d'autre part et telles que les contraintes (4) soient partout satisfaites ?

Le résultat suivant montre que l'on ne peut pas toujours obtenir un résultat aussi fort :

PROPOSITION 2.2. — *Soit (M, g) une variété riemannienne complète de dimension $n \geq 3$, ayant un bout isométrique au complémentaire $\mathbb{R}^n \setminus B$ d'une boule de l'espace euclidien (\mathbb{R}^n, δ) , et vérifiant la contrainte $R(g) = 0$. Alors (M, g) est isométrique à l'espace euclidien (\mathbb{R}^n, δ) .*

Ce résultat est une conséquence immédiate du cas de rigidité du théorème de la masse positive, démontré par R.M. Schoen et S.T. Yau en dimension $3 \leq n \leq 7$ [40, 39] et par E. Witten [42] en toute dimension sous l'hypothèse *spin*.

Cependant, un résultat de déformation sous contrainte existe bien, dû à J. Corvino [19]. Il fait appel à la famille à $(n+1)$ paramètres des métriques de Schwarzschild, de masse m et de centre de masse \vec{c} , définies par :

$$b_{m, \vec{c}} = \left(1 + \frac{m}{2|x - c|^{n-2}} \right)^{\frac{4}{n-2}} \delta, \quad (6)$$

où $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne de \mathbb{R}^n .

THÉORÈME 2.3 (Corvino, 2000). — *Soit (M, g) une variété riemannienne asymptotiquement plate, à courbure scalaire nulle. Alors il existe sur M une métrique \tilde{g} riemannienne, lisse, et des ouverts non-vides M_1, M_2 de M avec $\bar{M}_1 \subset M_2$ satisfaisant les propriétés suivantes :*

- \tilde{g} coïncide avec g sur M_1 ,

- \tilde{g} coïncide avec une métrique de Schwarzschild $b_{m,\vec{c}}$ dans la région asymptotique $M \setminus M_2$,
- \tilde{g} est à courbure scalaire nulle.

De plus, la région M_1 peut être choisie arbitrairement grande et les charges m, \vec{c} de la métrique de Schwarzschild peuvent alors être arbitrairement proches de celles de g .

Remarque 2.4. — Ce résultat peut aussi s'interpréter en termes d'espaces-temps : un espace-temps asymptotiquement plat, possédant une hypersurface totalement géodésique et solution des équations d'Einstein du vide (2) avec $\Lambda = 0$ peut être approché par un espace-temps lui aussi solution des équations d'Einstein du vide et ne différant que dans la région asymptotique, dans laquelle il est exactement Schwarzschild dans un plus petit voisinage de l'infini.

Le résultat de Corvino, comme les résultats ultérieurs obtenus selon la même méthode, exigent le recours à des familles de « modèles à l'infini ».

En 2003, J. Corvino et R.M. Schoen [21] étendent le résultat aux données initiales asymptotiquement plates (M, g, k) avec un $(0, 2)$ -tenseur symétrique k non-nécessairement nul. En dimension 3, la famille de données initiales à l'infini est celle des données initiales de Kerr à 10 paramètres $(m, \vec{p}, \vec{c}, \vec{a})$. Le même résultat est prouvé indépendamment par P.T. Chruściel et E. Delay [10] :

THÉORÈME 2.5 (Corvino-Schoen, Chruściel-Delay 2003). — *Soit (g, k) des données initiales asymptotiquement plates sur une variété M de dimension 3, satisfaisant aux équations des contraintes du vide $\Phi(g, k) = 0$. Alors il existe sur M des données initiales (\tilde{g}, \tilde{k}) lisses et des ouverts non-vides M_1, M_2 de M avec $\bar{M}_1 \subset M_2$ satisfaisant les propriétés suivantes :*

- (\tilde{g}, \tilde{k}) coïncide avec (g, k) sur M_1 ,
- (\tilde{g}, \tilde{k}) coïncide avec des données initiales de Kerr, $(\mathring{g}_{m,\vec{p},\vec{c},\vec{a}}, \mathring{k}_{m,\vec{p},\vec{c},\vec{a}})$ dans la région asymptotique $M \setminus M_2$,
- (\tilde{g}, \tilde{k}) est solution des équations des contraintes du vide.

Ces résultats, comme ceux par ailleurs établis dans les cas $\Lambda \neq 0$, sont obtenus selon une même méthode générale, dite de *recollement*. Nous allons décrire de manière qualitative cette méthode et le cadre dans lequel elle s'applique ; il n'y aura ainsi aucune analyse de l'opérateur des contraintes entre espaces de Sobolev ou de Hölder à poids, les fonctions « poids » introduites ci-dessous le seront de manière purement indicative, ceci dans le but d'alléger les notations. Pour tout détail concernant ce formalisme, on pourra se reporter à [10].

2.1. Le problème linéarisé et la résolution « modulo noyau »

Nous nous plaçons dans le cadre d'une variété M non-compacte, telle que le triplet de données initiales (M, g, k) est asymptotique à un triplet de « référence » (M_0, g_0, k_0) . Nous supposons toujours que ces deux triplets de données initiales sont solutions des contraintes (4) pour une certaine valeur fixée de Λ , et nous introduisons enfin une famille de données initiales $(\mathring{g}_Q, \mathring{k}_Q)$, satisfaisant les mêmes équations des contraintes sur M_0 , où Q décrit un espace de paramètres \mathcal{F} .

Nous aurons besoin de prendre une famille avec un espace de paramètres assez grand pour s'assurer de pouvoir effectuer le recollement, c'est-à-dire trouver un certain $Q \in \mathcal{F}$, des données initiales (\tilde{g}, \tilde{k}) sur M telles que (voir Figure 2.1) :

- (\tilde{g}, \tilde{k}) coïncide avec $(\mathring{g}_Q, \mathring{k}_Q)$ dans un voisinage de l'infini,
- (\tilde{g}, \tilde{k}) coïncide avec (g, k) dans un compact de M
- (\tilde{g}, \tilde{k}) est solution des équations des contraintes (4).

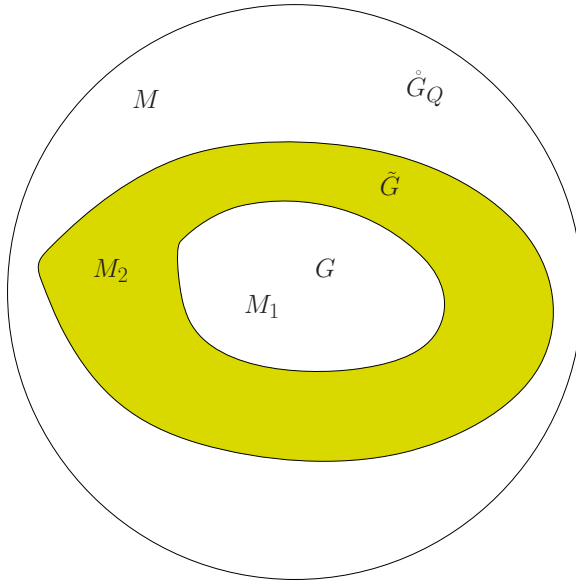


FIGURE 2.1. Le principe du recollement.

Pour le moment, introduisons une fonction de troncature $\chi : M \rightarrow [0, 1]$ lisse, avec $\chi = 0$ sur M_1 , $\chi = 1$ sur $M \setminus M_2$, et considérons

$$G_Q = (g_Q, k_Q) := (1 - \chi)G + \chi \mathring{G}_Q,$$

où l'on note $G = (g, k)$, et de même G_0, G_Q et \mathring{G}_Q . Les nouvelles données initiales G_Q ne sont pas solutions des contraintes (4) *a priori*, on peut cependant obtenir que $\Phi(G_Q)$ (où Φ est l'opérateur des contraintes défini dans (4)) est arbitrairement proche de 0 pour une certaine norme. Plus précisément, si Met est l'espace des métriques riemanniennes sur M , on a

$$\Phi : Met \times \Gamma(S^2T^*M) \longrightarrow \Gamma(\mathbb{R} \oplus T^*M) ,$$

et l'on utilise des espaces fonctionnels « à poids » sur les espaces de tenseurs apparaissant ci-dessus afin de s'assurer qu'ils sont à support compact dans la « zone de recollement » $M_2 \setminus \bar{M}_1$.

Le fait que $\Phi(G_Q)$ soit « petit » nous incite à chercher une correction δG , à support dans $M_2 \setminus \bar{M}_1$, telle que $\Phi(G_Q + \delta G) = 0$. Ceci nous amène naturellement à nous intéresser aux propriétés du linéarisé $d\Phi(G_Q)$ de l'opérateur Φ des contraintes en G_Q .

En fait, nous allons chercher δG sous la forme

$$\delta G = \psi^2 P_Q^*(f, Z) ,$$

où $P_Q^* = d\Phi(G_Q)^*$ est l'adjoint formel L^2 de l'opérateur linéarisé de Φ en G_Q , où ψ est une fonction « poids », et où $(f, Z) \in C^\infty(M) \times \Gamma(TM)$. Le rôle de la fonction ψ est de s'assurer que la solution δG au problème est à support compact dans $\Omega = M_2 \setminus \bar{M}_1$. Le choix de ψ d'une part, et des espaces à poids d'autre part permettent d'assurer cette condition (voir par exemple [10]). Typiquement, si x est une fonction *définissante* du bord $\partial\Omega$ du domaine de recollement, c'est-à-dire si

$$x \geq 0, \quad \partial\Omega = \{x = 0\} \quad \text{et} \quad dx \neq 0 \text{ sur } \partial\Omega ,$$

on prendra $\psi \sim e^{-x/2}$ tandis que (f, Z) peut appartenir à un espace de Sobolev à poids autorisant une croissance au bord de l'ordre de $e^{x/2}$.

On a, en G_0 , l'expression :

$$d\Phi_{G_0}^*(f, Z) = \left(\begin{array}{l} L_{g_0}^* f - \frac{1}{2} \nabla_p(k_0^{pq} Z_q) g_0 + \frac{1}{2} \nabla_p(Z^p k_0) \\ -\frac{1}{2} \mathcal{L}_Z g_0 + (\text{div}_{g_0} Z) g_0 - 2f k_0 + 2f(\text{tr}_{g_0} k_0) g_0 \end{array} \right) , \quad (7)$$

où $L_{g_0}^*$ est l'adjoint du linéarisé de l'opérateur courbure scalaire R évalué en g_0 , qui a pour expression :

$$L_{g_0}^* f = -(\Delta_{g_0} f) g_0 + \text{Hess}_{g_0} f - f \text{Ric}_{g_0} .$$

Notons P_0^* l'opérateur $d\Phi_{G_0}^*$. En 1975, V. Moncrief [37, 38] (voir aussi [21, Section 2] et [19, Proposition 2.7] dans le cas statique) établit un lien remarquable entre le noyau \mathcal{K}_0 de P_0^* et les isométries de l'espace-temps $(\mathcal{M}_0, \bar{g}_0)$ qui peut s'énoncer ainsi :

THÉORÈME 2.6 (Moncrief, [37, 38]). — L'espace $\mathcal{K}_0 = \ker P_0^*$ coïncide avec l'ensemble des couples $(f, Z) \in C^\infty(M) \times \Gamma(TM)$ tels que le vecteur $X = f\nu + Z$ définit un champ de vecteurs de Killing de l'espace-temps (M_0, \bar{g}_0) , où ν est la normale unitaire ($\bar{g}_0(\nu, \nu) = -1$) à l'hypersurface M .

Les éléments de \mathcal{K}_0 sont pour cette raison appelés **données initiales de Killing**, ou « KIDs » (pour *Killing Initial Data*), et sont notamment étudiés dans [5, 34]. On désignera parfois simplement cet espace sous le nom de *conoyau* dans la suite. Dans le cas particulier où l'on ne considère que des données initiales *symétriques en temps*, c'est-à-dire de la forme $(g, 0)$, l'espace \mathcal{K}_0 considéré est celui de la courbure scalaire linéarisée en g_0 , soit $\mathcal{K}_0 = \ker L_{g_0}^*$.

Pour trouver $(f, Z) \in C^\infty(M) \times \Gamma(TM)$ solution de

$$\Phi(G_Q + \psi^2 P_Q^*(f, Z)) = 0,$$

on écrit le linéarisé en (f, Z) , soit :

$$P_Q \psi^2 P_Q^*(f, Z).$$

Or, l'opérateur $\psi^{-2} P_Q \psi^2 P_Q^*$ est elliptique, autoadjoint, de noyau $\ker P_Q^*$. Dans le cas où \mathcal{K}_0 est trivial, le noyau de P_Q^* le sera également pour un recollement suffisamment près de l'infini et pour G_Q suffisamment proche de G_0 , par semi-continuité inférieure du rang. L'opérateur $\psi^{-2} P_Q \psi^2 P_Q^*$ est alors un isomorphisme et l'on peut invoquer le théorème des fonctions implicites, permettant de résoudre $\Phi(G_Q + \delta G) = 0$ pour un unique δG dans un voisinage de 0. Ce type de recollement est dit *localisé*.

En revanche, lorsque \mathcal{K}_0 est non-trivial, il constitue une obstruction à la résolution complète de l'équation $\Phi(G_Q + \delta G) = 0$. Celle-ci est contournée à l'aide de deux étapes : la première consiste à projeter le problème sur un orthogonal du conoyau \mathcal{K}_0 , en résolvant :

$$\Pi_{\mathcal{K}_0^\perp} \psi^{-2} \Phi(G_Q + \delta G) = 0.$$

La projection permet de retrouver la propriété d'isomorphisme de l'opérateur linéarisé correspondant, de la forme $\Pi_{\mathcal{K}_0^\perp} \psi^{-2} P_Q \psi^2 P_Q^*$. Ce faisant, on obtient une solution *modulo noyau* de l'équation des contraintes. Ainsi, si $(V_i)_i$ est une base de \mathcal{K}_0 d'éléments de la forme $V_i = (f_i, Z_i)$, il existe une solution localement unique au problème projeté, et celle-ci s'écrit

$$\delta G_Q = \psi^2 P_Q^*(f_Q, Z_Q).$$

Ceci revient à écrire qu'on obtient

$$\psi^{-2} \Phi(G_Q + \delta G_Q) = \sum_{i=1}^d \alpha_i V_i,$$

où d est la dimension de \mathcal{K}_0 et les coefficients α_i dépendent du paramètre Q choisi.

2.2. Familles admissibles et résolution complète

Le but de ce paragraphe est d'expliquer comment l'on peut s'assurer de l'existence d'un certain paramètre $Q \in \mathcal{F}$ tel que les coefficients α_i apparaissant ci-dessus soient tous nuls. Ce faisant, on aura obtenu que les données initiales $\widetilde{G}_Q := G_Q + \delta G_Q$ sont solutions des équations des contraintes.

2.2.1. Projection sur \mathcal{K}_0

Soit V un élément non-nul de \mathcal{K}_0 , on examine la projection sur l'espace $L^2_\psi(g_0)$ de $\psi^{-2}\Phi(\widetilde{G}_Q)$; celle-ci s'écrit simplement :

$$\int_{\Omega} \langle \Phi(\widetilde{G}_Q), V \rangle d\mu_{g_0} ,$$

où l'on intègre sur la zone de recollement $\Omega = M_2 \setminus \bar{M}_1$, et où les symboles $\langle \rangle$ représentent la contraction via la métrique g_0 . Il s'agit donc simplement de la projection $L^2(g_0)$ de $\Phi(\widetilde{G}_Q)$.

L'étape suivante consiste à transformer l'écriture de l'intégrale ci-dessus pour faire apparaître les *charges globales*, en s'inspirant largement des notations de [36]. Soit G_1 un couple de données initiales asymptotique à G_0 sur M , et $V \in \Gamma(\mathbb{R} \oplus TM)$ un « KID », c'est-à-dire un élément non-nul de l'espace $\mathcal{K}_0 = \ker d\Phi(G_0)^*$. Notons $e = G_1 - G_0$. On a alors

$$\int_{\Omega} \langle \Phi(G_1), V \rangle d\mu_{g_0} = \int_{\Omega} \langle \Phi(G_0), V \rangle d\mu_{g_0} + \int_{\Omega} \langle d\Phi(G_0).e, V \rangle d\mu_{g_0} + q(V, e) , \tag{8}$$

où $q(V, e)$ est l'intégrale sur Ω des termes d'ordres inférieurs du développement asymptotique de $\langle \Phi(G_1), V \rangle$ en G_0 . On remarque que tous les termes du développement ci-dessus sont linéaires en V . On a d'autre part la formule d'intégration par parties suivante :

$$\langle d\Phi(G_0).e, V \rangle = \langle d\Phi(G_0)^*.V, e \rangle + \operatorname{div} \mathbb{U}(V, e) , \tag{9}$$

qui se réécrit sous forme intégrale

$$\int_{\Omega} \langle d\Phi(G_0).e, V \rangle d\mu_{g_0} = \int_{\Omega} \langle d\Phi(G_0)^*.V, e \rangle d\mu_{g_0} + \oint_{\partial\Omega} \mathbb{U}(V, e)(\nu) d\sigma_{g_0} , \tag{10}$$

où $d\sigma_{g_0}$ est la mesure induite sur $\partial\Omega$ par g_0 et ν est la normale unitaire à $\partial\Omega$. L'intégrale de bord apparaissant ici est la *charge de G_1 par rapport à G_0 et à V* . La 1-forme $\mathbb{U}(V, e)$ se calcule à l'aide de la formule (9) pour $V = (f, \alpha)$, $e = (h, l)$ et prend la forme générale :

$$\begin{aligned} \mathbb{U}(V, e) &= f(\operatorname{div} h - d(\operatorname{tr} h)) - \iota_{\nabla} f h + (\operatorname{tr} h) df \\ &+ 2(\iota_{\alpha} l - (\operatorname{tr} l)\alpha) + (\operatorname{tr} h)\iota_{\alpha} k_0 + g_0(k_0, h)\alpha - 2\overline{\iota_{\alpha}}(h \circ k_0). \end{aligned} \quad (11)$$

En l'absence de précision, la trace et la divergence sont prises selon la métrique g_0 . On observe en particulier que $\mathbb{U}(V, e)$ est linéaire en V et en e .

Exemple 2.7. — Pour $G_0 = (\delta, 0)$ les données initiales induites sur $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ de l'espace-temps de Minkowski $\mathbb{R}^{n,1}$, l'espace \mathcal{K}_0 est engendré par les éléments $V = (f, \alpha)$ suivants :

$$(1, 0), (x^i, 0), \left(0, \frac{\partial}{\partial x^i}\right), \left(0, x^i \frac{\partial}{\partial x^j} - x^j \frac{\partial}{\partial x^i}\right).$$

En particulier, on calcule dans ce cas que si G est asymptotique à G_0 , $e = (h, l)$ avec $e = G - G_0$, alors $\mathbb{U}((1, 0), e) = \operatorname{div} h - d(\operatorname{tr} h)$. Cette expression définit de même la *masse* d'une métrique g asymptotiquement plate. Dans le cas où g est la métrique de Schwarzschild définie par la formule (6), on vérifie aisément que sa masse est bien égale au nombre m .

En retournant à la formule intégrale et en utilisant les hypothèses $\Phi(G_0) = 0$ et $V \in \mathcal{K}_0$, on obtient

$$\int_{\Omega} \langle \Phi(G_1), V \rangle d\mu_{g_0} = \oint_{\partial\Omega} \mathbb{U}(V, e)(\nu) d\sigma_{g_0} + q(V, e), \quad (12)$$

autrement dit la projection de $\Phi(G_1)$ sur un élément V de l'espace des *KIDs* est déterminée principalement par l'intégrale de bord de Ω . Par commodité, on suppose que la région asymptotique de M est difféomorphe à $[R_0, +\infty) \times N$, où N est une variété compacte de dimension $n - 1$, et que Ω s'écrit sous la forme

$$\Omega = (R_1, R_2) \times N,$$

où $R_0 < R_1 < R_2$.

2.2.2. Charges globales et familles admissibles

Compte-tenu du calcul précédent, il nous faut maintenant évaluer les *charges globales* définies comme suit :

DÉFINITION 2.8. — Soit V un élément non-nul de \mathcal{K}_0 , $e = G_1 - G_0$ où les données initiales G_1 sont asymptotiques à G_0 . La **charge globale** de G_1 par rapport à V et à G_0 est la limite

$$m(e, V) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\{R\} \times N} \mathbb{U}(V, e)(\nu) d\sigma_{g_0} . \tag{13}$$

On retrouve cette définition générale dans [36], et appliquée à des cas particuliers dans [12] ou encore [14]. En prenant le domaine de recollement Ω suffisamment loin dans la région asymptotique (c'est-à-dire pour R_1 assez grand), le terme de bord intégré sur $\partial\Omega$ sera aussi proche que voulu d'une de ces charges globales.

Exemple 2.9. — Pour $G_0 = (\delta, 0)$ et $V = (1, 0) \in \mathcal{K}_0$, la charge globale de $G = (g, k)$ par rapport à G_0 et à V s'écrit

$$m(e, V) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\{R\} \times N} (\operatorname{div} h - d(\operatorname{tr} h))(\nu) d\sigma_{g_0} .$$

On retrouve ainsi la définition classique (cf. [2]) de la *masse* de données initiales asymptotiquement plates. Cette formule définit de même la masse d'une métrique g asymptotiquement euclidienne. Dans ce cas, l'élément considéré dans le conoyau du linéarisé de la courbure scalaire est $f = 1$. Concernant le fait que la masse est un invariant géométrique, on pourra se reporter aux travaux de R. Bartnik [3] et de P.T. Chruściel [8], ainsi que de B. Michel [36] pour les invariants asymptotiques en général.

Revenons maintenant au recollement de données initiales G asymptotiques à G_0 , avec certaines données initiales \mathring{G}_Q appartenant à une famille de modèles. En appliquant le procédé pour $G_1 = \widetilde{G}_Q$, on obtient que

$$\int_{\Omega} \langle \Phi(\widetilde{G}_Q), V \rangle d\mu_{g_0} = m(\mathring{G}_Q - G_0, V) - m(G - G_0, V) + o(1) + q_{\infty}(V, e) , \tag{14}$$

où $q_{\infty}(V, e)$ est la limite de $q(V, e)$ lorsque R_1 vers l'infini, et où le reste « $o(1)$ » tend vers 0 quand R_1 tend vers l'infini (c'est-à-dire quand on prend le domaine de recollement Ω de plus en plus loin dans la région asymptotique). La première charge globale ci-dessus provient de la contribution sur $\{R_2\} \times N$ de l'intégrale de bord, où \widetilde{G}_Q coïncide avec \mathring{G}_Q , alors que la partie restante sur $\{R_1\} \times N$, où \widetilde{G}_Q coïncide avec G , contribue à la deuxième charge globale.

Afin de mener à bien l'annulation de la projection sur \mathcal{K}_0 de $\Phi(\widetilde{G}_Q)$, on introduit la notion de *famille admissible* de données initiales, telle que définie par Corvino et Schoen dans [21].

DÉFINITION 2.10. — Une famille $(\mathring{G}_Q)_{Q \in \mathcal{F}}$ de données initiales sur M est dite **admissible** pour G_0 si Q_0 est dans l'intérieur de \mathcal{F} avec $G_0 = \mathring{G}_{Q_0}$ et si l'application

$$Q \mapsto m(\mathring{G}_Q - G_0, \cdot)$$

est un homéomorphisme local entre un voisinage U de Q_0 dans \mathcal{F} et un voisinage W de 0 dans \mathcal{K}_0^* .

Ainsi, une telle famille admissible doit avoir un espace de paramètres \mathcal{F} de dimension égale à la dimension de l'espace des KIDs \mathcal{K}_0 . On va maintenant voir que cette condition permet de surmonter l'obstruction à la résolution des équations des contraintes générée par \mathcal{K}_0 , grâce à un choix suffisamment grand de paramètres Q .

Mentionnons d'abord le résultat classique suivant, conséquence du théorème du point fixe de Brouwer (voir [10, Lemme 3.18]) :

PROPOSITION 2.11. — Soit $F : U \rightarrow W$ un homéomorphisme entre deux ouverts U et W de \mathbb{R}^d . Soit $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ une famille d'applications continues $U \rightarrow \mathbb{R}^d$ convergeant uniformément vers F quand λ tend vers $+\infty$. Alors, pour $y \in V$ quelconque, il existe λ_0 tel que la condition $\lambda \geq \lambda_0$ entraîne l'existence d'une solution x_λ à l'équation $G_\lambda(x) = y$.

Dans notre cas, si $(\mathring{G}_Q)_{Q \in \mathcal{F}}$ est une famille admissible pour G_0 , on va appliquer la proposition pour $d = \dim \mathcal{K}_0$, $U \subset \mathcal{F}$ et $W \subset \mathcal{K}_0^*$ les ouverts apparaissant par définition d'une famille admissible, $\lambda = R_1$ et

$$F_{R_1, R_2}(Q)[V] = \int_{\Omega} \langle \Phi(\widetilde{G}_Q), V \rangle d\mu_{g_0}.$$

Plus précisément, choisissons Ω de sorte que $R_2 = R_2(R_1)$ soit une fonction lisse de R_1 satisfaisant toujours la condition $R_2(R_1) > R_1$ (en pratique, dans les cas explicites qui sont décrits au paragraphe suivant, R_2 est fonction affine de R_1). On note alors $F_{R_1} := F_{R_1, R_2(R_1)}$.

Quand $R_1 \rightarrow \infty$, on trouve que $F_{R_1}(Q)[V]$ converge vers $m(\mathring{G}_Q - G_0, V) - m(G - G_0, V) + q_\infty(V, e)$, et l'on définit cette limite comme étant $F(Q)[V]$.

Pour chaque valeur de Q dans U , on a ainsi défini $F(Q) \in \mathcal{K}_0^*$. Pour prouver que cette application F satisfait les hypothèses de la proposition ci-dessus, introduisons une application intermédiaire F^0 de la manière suivante :

PROPOSITION 2.12. — Soit F^0 l'application définie par :

$$F^0(Q) = m(\mathring{G}_Q - G_0, \cdot) + q(\cdot, e_Q^0),$$

où $e_Q^0 = \widetilde{G}_Q^0 - G_0$, où \widetilde{G}_Q^0 est obtenue comme perturbation à support compact dans Ω de $(1 - \chi)G_0 + \chi\mathring{G}_Q$. Alors :

- $F^0(Q_0) = 0$,
- F^0 est un homéomorphisme entre un voisinage de Q_0 dans \mathcal{F} et son image dans \mathcal{K}_0^* ,
- Lorsque $G \rightarrow G_0$, $F(Q)$ converge uniformément vers $F^0(Q)$ par rapport à Q dans un voisinage de Q_0 .

L'application F^0 est par définition obtenue de la même manière que F , mais dans le cas particulier où $G = G_0$.

Démonstration. —

En $Q = Q_0$, c'est-à-dire lorsque $\mathring{G}_Q = G_0$, on a $F^0(Q_0) = q(\cdot, e_{Q_0}^0)$, et $e_{Q_0}^0 = \widetilde{G_{Q_0}}^0 - G_0$. Par définition (voir paragraphe 2.1), $\widetilde{G_{Q_0}}^0 = (1 - \chi)G_0 + \chi G_0 + \delta G_{Q_0}^0 = G_0 + \delta G_{Q_0}^0$ où $\delta G_{Q_0}^0$ est l'unique solution au voisinage de 0 de l'équation des contraintes projetée sur un supplémentaire de \mathcal{K}_0 . Comme $\delta G = 0$ est une solution triviale de ce même problème, on a par unicité $\delta G_{Q_0}^0 = 0$. Ainsi, $\widetilde{G_{Q_0}}^0 = G_0$, c'est à dire $e_{Q_0}^0 = 0$, ce qui prouve le premier point.

Le deuxième point découle du fait que $Q \mapsto m(\mathring{G}_Q - G_0, \cdot)$ est un homéomorphisme entre un voisinage de Q_0 et son image dans \mathcal{K}_0^* (car \mathcal{F} admissible pour G_0), et du fait que $q_\infty(\cdot, e_Q^0) = o(|e_Q^0|) = o(|Q - Q_0|)$. On garde donc la propriété d'homéomorphisme quitte à prendre un voisinage plus petit de Q_0 dans \mathcal{F} .

Pour le troisième point, on calcule

$$F(Q) - F^0(Q) = -m(G - G_0, \cdot) + q_\infty(\cdot, e_Q) - q_\infty(\cdot, e_{Q_0}^0).$$

Il nous suffit donc de prouver la convergence uniforme (par rapport à Q) de e_Q vers $e_{Q_0}^0$ quand G tend vers G_0 . Or,

$$\begin{aligned} e_Q - e_{Q_0}^0 &= (1 - \chi)(G - G_0) + \chi(\mathring{G}_Q - G_0) + \delta G_Q \\ &- \chi(\mathring{G}_Q - G_0) - \delta G_Q^0 \\ &= (1 - \chi)(G - G_0) + \delta G_Q - \delta G_Q^0, \end{aligned} \tag{15}$$

La convergence uniforme de δG_Q vers δG_Q^0 quand $G \rightarrow G_0$ s'obtient enfin par une version « à paramètre » du théorème de point fixe de Picard utilisé pour résoudre le problème projeté dans la section précédente (voir [10, Proposition G.1]). \square

Munis de ce résultat, nous pouvons appliquer la Proposition 2.11 à la famille d'applications F convergeant uniformément vers F^0 lorsque $G \rightarrow G_0$: pour tout G assez proche de G_0 , il existe une unique solution $Q \in U_0$ à l'équation $F(Q) = 0$, où U_0 est un voisinage de Q_0 dans \mathcal{F} .

D'autre part, F est également un homéomorphisme d'un voisinage de Q_0 dans \mathcal{F} vers son image. Ainsi pour tout G assez proche de G_0 , on peut choisir un même voisinage U_0 de Q_0 , quitte à le restreindre (voir notamment [18, Proposition 4.3]).

En récapitulant, on obtient l'existence d'un voisinage U_0 de Q_0 dans \mathcal{F} tel que pour tout G assez proche de G_0 , F est un homéomorphisme de U_0 sur $F(U_0)$ et l'équation $F(Q) = 0$ admet une unique solution Q dans U_0 .

En revenant à la formule (14) définissant $F_{R_1}(Q)$, on pourra appliquer une nouvelle fois la Proposition 2.11, si l'on a bien convergence uniforme en Q quand $R_1 \rightarrow +\infty$ du terme « $o(1)$ » apparaissant dans cette formule, et en déduire que pour tout G assez proche de G_0 et pour tout R_1 assez grand, l'équation $F_{R_1}(Q) = 0$ admet une solution Q dans U_0 . Pour ces valeurs de G , de R_1 et de Q , on aura donc

$$\Phi(\widetilde{G_Q}) = 0,$$

ce qui nous fournit le résultat de recollement désiré.

- Remarque 2.13.* — (1) En plus de ce résultat, la méthode employée indique que la fonctionnelle de charge globale $m(\mathring{G}_Q - G_0, \cdot)$ de \mathring{G}_Q par rapport à G_0 peut être prise aussi proche que voulue de celle de G par rapport à G_0 , $m(G - G_0, \cdot)$ quand R_1 tend vers $+\infty$.
- (2) Outre le résultat d'existence ainsi établi, il faut noter l'*unicité locale* de la solution, que l'on soit dans le cas localisé ou non. Celle-ci repose sur l'application d'un théorème de point fixe (voir par exemple [18, Proposition 4.3]) pour le problème projeté évoqué au paragraphe 2.1, et de la propriété d'homéomorphisme pour la projection sur l'espace des KIDs.
- (3) En pratique (voir paragraphe suivant), les modèles \mathring{G}_Q utilisés dans de nombreux exemples de recollement sont directement paramétrés par les charges globales des modèles, ce qui rend trivial le fait qu'elles sont admissibles. On aura ainsi simplement $m(\mathring{G}_Q - G_0, V_i) = Q_i$, où V_i est le i -ème élément d'une base fixée de \mathcal{K}_0 et Q s'écrit (Q_1, \dots, Q_d) où $d = \dim \mathcal{K}_0$.
- (4) L'importance du choix de bonnes hypothèses de décroissance de G vers G_0 s'est faite sentir tout au long de ce paragraphe, nous nous contentons ici par souci de simplification de supposer qu'elles sont satisfaites afin de pouvoir mener le raisonnement général.

3. Applications des techniques de recollement

3.1. Résultats

Nous allons maintenant passer en revue les principaux résultats obtenus à l'aide d'une méthode de recollement comparable à celle décrite dans le paragraphe ci-dessus.

Comme cela a été rappelé dans les sections précédentes, il faut distinguer deux types de recollement de données initiales :

- Le recollement *localisé*, pour lequel l'espace \mathcal{K}_0 des *KIDs* correspondant est trivial. Dans ce cas, le raisonnement mené au paragraphe 2.1 suffit en principe pour retrouver une solution aux équations des contraintes, sans invoquer d'autre modèle à l'infini que les données initiales de référence G_0 .
- Le recollement *non-localisé*, qui correspond au cas où le linéarisé de l'opérateur des contraintes en G_0 est au contraire dégénéré, tel que décrit dans le paragraphe 2.2.

3.1.1. Recollement localisé

La pertinence du recollement *localisé* repose sur la conjecture affirmant que ce cas est *générique*. Un important résultat de R. Beig, P.T. Chruściel et R.M. Schoen [6] établit ce résultat dans un certain nombre de cas importants en relativité. Sous certaines hypothèses asymptotiques ou de signe de la constante cosmologique, ils prouvent de fait que les espaces-temps solutions des équations d'Einstein du vide ne possédant pas de champ de Killing local sont génériques.

Ce résultat motive le travail de P.T. Chruściel, J. Isenberg et D. Pollack [13], où est posée la question suivante :

Étant donnés deux triplets de données initiales solutions des contraintes, que l'on prive chacun de boules de rayon ε , et que l'on recolle suivant un 'cou' $\mathbb{S}^{n-1} \times I$ où I est un intervalle. Peut-on trouver des données initiales, solutions des contraintes, qui coïncident avec les données initiales d'origine en dehors d'un voisinage du cou ?

Une réponse affirmative est apportée à ce problème dans [13] sous l'hypothèse que les données initiales d'origine ne possèdent pas de *KIDs* non triviaux ce qui, au vu de ce qui précède, établit le résultat pour des données initiales génériques. Dans le même travail, ce résultat sert d'ingrédient pour montrer qu'il existe des espaces-temps du vide, maximaux et globalement hyperboliques contenant une hypersurface de Cauchy qui elle-même n'admet aucune hypersurface fermée CMC [13, Section 5.1].

Un tel résultat de recollement a été généralisé ensuite par L. Mazzieri [35]. Il montre qu'une « somme connexe généralisée » peut être construite entre deux données initiales compactes, solutions des contraintes, à condition que celles-ci ne possèdent pas de données initiales de Killing conforme (ce qui s'exprime également comme une condition de non-dégénérescence). Ce résultat est ensuite étendu par E. Delay et L. Mazzieri [24] au cas où les données initiales d'origine sont non-compactes, asymptotiquement plates ou hyperboliques, tout en conservant le fait que le recollement est localisé.

On constate dans ces travaux que les résultats expriment un recollement à déformation localisée : la résolution « modulo noyau », explicitée au paragraphe 2.1, permet en effet de conclure.

3.1.2. Recollement non-localisé

D'après le résultat de V. Moncrief (Théorème 2.6) présenté à la section précédente, on sait interpréter les éléments non-nuls de \mathcal{K}_0 comme les données initiales des vecteurs de Killing de l'espace temps dont G_0 fournit les données initiales. Ainsi, lorsqu'on considère des données initiales d'un espace-temps dont le comportement est asymptotique à un espace-temps $(\mathcal{M}_0, \bar{g}_0)$ ayant un important groupe de symétries, on aura en contrepartie besoin d'une famille d'espaces-temps « modèles » permettant de contourner l'obstruction \mathcal{K}_0 . Une liste de résultats pour ce type de recollement est récapitulée dans le tableau 1. Si l'idée générale de leurs preuves est celle décrite à la Section 2, chaque cas engendre des spécificités dues au signe de la constante cosmologique, à la dimension de \mathcal{K}_0 , à l'opérateur étudié (courbure scalaire ou opérateur des contraintes) et surtout à la géométrie à l'infini du modèle. Les propriétés des opérateurs et de leur linéarisés s'en trouvent affectées ; un cas flagrant est celui où $G_0 = b$ est la métrique hyperbolique sur \mathbb{H}^n . En effet, l'analyse effectuée dans [11] montre qu'une hypothèse relativement forte de décroissance asymptotique de g vers b est nécessaire pour mener à bien l'argument de recollement ; cette décroissance est bien plus forte que ce qui est requis pour définir la charge globale (plus précisément le moment-énergie) de g par rapport à b .

Notons que dans le tableau 1 n'apparaissent pas certains cas *extrémaux*. L'un de ceux-ci est le cas où la référence G_0 est *Schwarzschild-de Sitter extrémal*, défini dans [16, Section 2]. Il se produit lorsque, à constante cosmologique $\Lambda > 0$ fixée, la valeur de m est telle que la fonction V^2 définie dans l'équation (3) ci-dessus est négative sur son domaine de définition et admet une racine double. La structure causale de l'espace-temps s'en trouve alors considérablement modifiée et la donnée initiale est de géométrie

Référence G_0	Opérateur	$\dim \mathcal{K}_0$	Modèle \mathring{G}_Q	Auteur(s)
(\mathbb{R}^n, δ)	R ($\Lambda = 0$)	$n + 1$	$b_{m, \vec{e}}$ (Schwarzschild)	Corvino
$(\delta, 0)$ $n = 3$	Φ ($\Lambda = 0$)	10	$\mathring{G}_{m, \vec{p}, \vec{a}, \vec{c}}$ (Kerr)	Corvino-Schoen Chruściel-Delay
(\mathbb{H}^n, b)	$R+n(n-1)$ ($\Lambda = -n$)	$n + 1$	$\mathring{b}_{\mathbf{p}}$ (Kottler-AdS)	Chruściel-Delay [11]
$\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}$ \mathring{b}_{m_0}	$R-n(n-1)$ ($\Lambda = n$)	1	\mathring{b}_m (Kottler-dS)	Chruściel-Pollack + Pacard [16, 15]
$\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$ \mathring{b}_{m_0}	Φ ($\Lambda > 0$)	4	$\mathring{g}_{m, \vec{a}}$ (Kerr-dS)	Cortier
$\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$ \mathring{g}_{m_0, a_0}	Φ ($\Lambda > 0$)	2	$\mathring{g}_{m, a}$ (Kerr-dS)	Cortier

TABLE 1. Résultats de recollement non-localisé pour l'opérateur des contraintes (Φ) ou l'opérateur courbure scalaire (R) sur des données initiales non-compactes, suivant le signe de la constante cosmologique Λ . Toutes les familles de modèles apparaissant ci-dessus sont paramétrées directement par leurs charges globales telles que m , \vec{a} , \mathbf{p} , etc.

cylindrique. Les travaux [16, 18] de recollement ne s'appliquent pas à ce cas extrémal, qui mériterait néanmoins d'être traité.

Outre les résultats regroupés dans le tableau 1, on peut citer les données initiales à « N corps » de P.T. Chruściel, J. Corvino et J. Isenberg [9]. À partir de N paires de données initiales asymptotiquement euclidiennes et solutions des contraintes, une nouvelle paire de données initiales y est construite, satisfaisant les mêmes propriétés et contenant des régions prescrites de chacune des N données initiales d'origine.

Une remarque générale sur le recollement non-localisé est qu'il est a priori possible d'utiliser plus d'une famille *admissible* de données initiales modèles à l'infini. Un exemple de situation où deux familles de modèles peuvent être utilisées pour le même problème de recollement est le cas de variétés asymptotiquement hyperboliques.

D'une part, la famille de *Kottler-Schwarzschild-Anti-de Sitter* (KSAdS) est admissible et conduit au résultat de P.T. Chruściel et E. Delay [11], sous condition assez forte de décroissance des métriques asymptotiquement hyperboliques.

D'autre part, dans un travail récent [17], l'auteur a établi l'existence d'une famille de modèles qui se trouve être également admissible et qui possède les propriétés d'être conformément plate, à courbure scalaire constante égale à $-n(n-1)$ et dont les charges globales (dans ce cas le vecteur de moment-énergie) peuvent être arbitraires. Cette dernière propriété la distingue de la famille de KSAdS pour laquelle le vecteur de moment-énergie \mathbf{p} est nécessairement *de genre temps*, soit $p_0^2 > \sum_{i=1}^n p_i^2$ dans une base indépendante de la métrique asymptotiquement hyperbolique considérée. Les arguments de [11] s'appliquent encore et montrent qu'une variété asymptotiquement hyperbolique, à courbure scalaire constante, peut être recollée en une autre avec un bout coïncidant avec un de des modèles construits. L'intérêt d'un tel résultat est justifié dans le paragraphe suivant.

Enfin, un travail de E. Delay [22] étend les recollements pour les métriques g asymptotiques à une certaine référence g_0 de la manière suivante : étant donnée une interpolation de g et g_0 effectuée dans une région Ω , on peut en trouver une perturbation, à support compact dans Ω , telle que le résultat fournisse une interpolation entre les courbures scalaires de g et de g_0 . Un cas particulier important est le cas asymptotiquement plat : si la courbure scalaire de g satisfait $R(g) \in L^1$, $R(g) \geq 0$, on peut comme précédemment effectuer un recollement avec une métrique \tilde{g} entre g et une métrique de Schwarzschild, telle que la condition $0 \leq R(\tilde{g}) \leq R(g)$ soit partout satisfaite.

3.2. Applications et perspectives

3.2.1. Étude du comportement à l'infini de données initiales asymptotiques à un modèle

Le principal attrait des méthodes de recollement évoquées ci-dessus est sans doute le fait que d'un problème posé sur des données initiales quelconques asymptotiques à un modèle, on puisse se ramener à l'étude de ce même problème pour des données initiales ayant une région asymptotique « simplifiée », dans laquelle ce problème peut être lui-même considérablement simplifié. Parmi les plus importants et abondamment étudiés se trouvent les problèmes de type « masse positive ». Dans le cas des métriques asymptotiquement plates, on a l'énoncé célèbre suivant :

CONJECTURE 3.1. — *Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension $n \geq 3$, complète et asymptotiquement plate. Si la courbure scalaire de g est positive ou nulle, alors la masse m_g de g est positive, et nulle si et seulement si (M, g) est isométriquement l'espace euclidien (\mathbb{R}^n, δ) .*

Démontré en petites dimensions $3 \leq n \leq 7$ par R.M. Schoen et S.-T. Yau [40, 41, 39] et dans le cas où M est *spin* par E. Witten [42], le problème reste ouvert en toute généralité. Dans le cas non-spin, une première étape essentielle de la preuve [39] est de remplacer g par une métrique \tilde{g} qui diffère de g seulement au voisinage de l'infini, où \tilde{g} est conformément plate dans la région asymptotique. Il est possible de réaliser cette opération en utilisant le théorème de recollement de J. Corvino [19] étendu au résultat d'interpolation des courbures scalaires de E. Delay [22], puisqu'en effet les métriques de Schwarzschild, en plus d'être à courbure scalaire nulle, sont bien conformément plates. De plus, en réalisant le recollement suffisamment près de l'infini, il est possible d'obtenir que la masse de \tilde{g} est arbitrairement proche de m_g , comme cela a été indiqué pour les charges globales dans les remarques à la fin de la Section 2. Ce résultat est donc particulièrement adapté au schéma de la preuve de Schoen-Yau [40], puisque celle-ci commence par un raisonnement par l'absurde en supposant que la masse de (M, g) est strictement négative, et l'on peut alors se ramener au cas d'une métrique conformément plate dont la masse est encore strictement négative. Pour plus de détails concernant cette conjecture et les méthodes de preuve, on pourra se reporter aux articles de synthèse [30, 26].

3.2.2. Encore plus de recollement et d'applications...

Ici sont donnés quelques autres résultats intéressants de recollement, et quelques applications remarquables aussi bien en géométrie qu'en relativité générale mathématique.

Équations des contraintes avec second membre. Une façon intéressante d'un point de vue physique de poursuivre l'étude de recollements de données initiales est de considérer le cas des espaces-temps (\mathcal{M}, \bar{g}) solutions des équations d'Einstein avec *interactions non-gravitationnelles*, c'est-à-dire en considérant l'équation (1) en toute généralité. Ainsi, en 2005, J. Isenberg *et al.*[28] ont établi un résultat de recollement de données initiales dans le cas où celles-ci ne sont pas solutions des équations des contraintes du vide (4), mais avec second membre non-nul, ce qui correspond à un modèle physique (fluide parfait, Einstein-Vlasov, *etc*). Leur méthode se base

sur l'existence (ou non) de champs de Killing conforme non-triviaux de l'espace-temps, leur existence pouvant être interprétée comme un critère de dégénérescence.

Recollement d'opérateurs elliptiques sous-déterminés. Le procédé de recollement s'avère également utile lors de l'étude générale d'EDP elliptiques sous-déterminées (*i.e.* dont le symbole principal est surjectif). E. Delay étudie dans [23] l'équation

$$PU = f$$

où f est une fonction lisse à support compact sur une variété (M, g) , et P est un opérateur elliptique sous-déterminé. Il montre, moyennant quelques hypothèses supplémentaires sur P que des solutions U lisses et à support compact existent, la preuve reposant sur deux étapes ressemblant à celles décrites à la Section 2. Ce résultat est ensuite appliqué au cas où $P = d^*$ (opérateur divergence), ou encore à celui des *TT-tenseurs*, avec applications à des situations physiques ou géométriques, telles que l'étude de la résolution des équations des contraintes par la *méthode conforme*.

A noter que dans un travail récent [20], J. Corvino, M. Eichmair et P. Miao obtiennent un recollement *localisé*, à courbure scalaire constante et où le volume total est préservé. Ils montrent ensuite comment ce résultat peut être utilisé pour construire une famille de contre-exemples à la conjecture de Min-Oo sur la rigidité de l'hémisphère \mathbb{S}_+^n .

D'autres applications en géométrie et relativité générale. Les résultats de recollement tels que ceux décrits dans les paragraphes précédents s'avèrent être des outils efficaces dans diverses situations d'analyse géométrique, dont les suivantes :

- Dans [29], J. Jauregui utilise le résultat de recollement de J. Corvino [19] dans le cadre suivant de la *conjecture de Bartnik* (voir [1] pour un énoncé précis) : étant donné une surface Σ homéomorphe à la sphère, une métrique γ et une fonction H sur Σ , peut-on trouver un *remplissage de Bartnik*, c'est-à-dire une variété (M, g) de dimension 3, asymptotiquement plate, à bord ∂M coïncidant avec Σ et dont la métrique et la courbure moyenne induites sur ∂M coïncident respectivement avec γ et H ? Il prouve dans un cas particulier que l'unique manière de « remplir » ainsi l'extérieur de Σ de telle sorte que g ait une courbure scalaire positive l'est par une métrique *statique*. De telles situations sont reliées à la notion de *masse quasi-locale*. Celle-ci constitue un candidat à la définition de la notion physique de masse d'un

système isolé en relativité générale qui a l'avantage de ne pas requérir de calcul à l'infini, contrairement à ce qu'il se passe pour la masse ADM définie dans les sections précédentes.

- Dans [32], H. Lindblad et I. Rodnianski établissent la stabilité globale de l'espace-temps de Minkowski, en se restreignant aux données initiales qui coïncident avec celles de Schwarzschild au voisinage de l'infini. Les résultats de recollement [19, 10] fournissent un outil leur permettant d'étendre ce résultat pour des données initiales asymptotiquement plates plus générales [33].

Remerciements

L'auteur souhaite ici remercier Romain Gicquaud et Erwann Delay pour leur relecture du manuscrit et leurs suggestions.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. ANDERSON & M. KHURI, « On the Bartnik extension problem for the static vacuum Einstein equations », *Class. Quantum Grav.* **30** (2013), 125005.
- [2] R. ARNOWITT, S. DESER & C. MISNER, « Coordinate invariance and energy expressions in general relativity », *Phys. Rev.* **122** (1961), p. 997-1006, arXiv : gr-qc/0405109.
- [3] R. BARTNIK, « The mass of an asymptotically flat manifold », *Commun. Pure Appl. Math.* **39** (1986), p. 661-693.
- [4] R. BARTNIK & J. ISENBERG, « The constraint equations », in *The Einstein equations and the large scale behavior of gravitational fields : 50 years of the Cauchy problem in general relativity*, eds P.T. Chruściel, H. Friedrich, Birkhauser Basel, Switzerland, 2004, p. 1-34.
- [5] R. BEIG & P. CHRUŚCIEL, « Killing Initial Data », *Class. Quantum Grav.* **14** (1997), n° 1A, p. A83-A92, arXiv : gr-qc/9604040.
- [6] R. BEIG, P. CHRUŚCIEL & R. SCHOEN, « KIDs are non-generic », *Ann. H. Poincaré* **6** (2005), n° 1, p. 155-194.
- [7] Y. CHOQUET-BRUHAT & R. GEROCH, « Global aspects of the Cauchy problem in general relativity », *Comm. Math. Phys.* **14** (1969), p. 329-335.
- [8] P. CHRUŚCIEL, « On the invariant mass conjecture in general relativity », *Commun. Math. Phys.* **120** (1988), p. 233-248.
- [9] P. CHRUŚCIEL, J. CORVINO & J. ISENBERG, « Construction of N-Body Initial Data Sets in General Relativity », *Commun. Math. Phys.* **304** (2011), n° 3, p. 637-647.
- [10] P. CHRUŚCIEL & E. DELAY, « On mapping properties of the general relativistic constraints operator in weighted function spaces, with applications », *Mém. Soc. Math. Fr.* (2003), n° 94.
- [11] ———, « Gluing constructions for asymptotically hyperbolic manifolds with constant scalar curvature », *Comm. Anal. Geom.* **17** (2009), n° 2, p. 343-381.

- [12] P. CHRUŚCIEL & M. HERZLICH, « The mass of asymptotically hyperbolic Riemannian manifolds », *Pacific J. Math* **212** (2003), n° 2, p. 231-264.
- [13] P. CHRUŚCIEL, J. ISENBERG & D. POLLACK, « Initial data engineering », *Commun. Math. Phys.* **257** (2005), n° 1, p. 29-42.
- [14] P. CHRUŚCIEL, J. JEZIEWSKI & S. LESKI, « The Trautman-Bondi mass of hyperboloidal initial data sets », *Adv. Theor. Math. Phys.* **8** (2004), n° 1, p. 83-139, arxiv.org/pdf/gr-qc/0307109.pdf.
- [15] P. CHRUŚCIEL, F. PACARD & D. POLLACK, « Singular Yamabe metrics and initial data with exactly Kottler-Schwarzschild-de Sitter ends II », *Math. Res. Lett.* **16** (2009), n° 1, p. 157-164.
- [16] P. CHRUŚCIEL & D. POLLACK, « Singular Yamabe metrics and initial data with exactly Kottler-Schwarzschild-de Sitter ends », *Ann. H. Poincaré* **9** (2008), p. 639-654.
- [17] J. CORTIER, « A family of asymptotically hyperbolic manifolds with arbitrary energy-momentum vectors », *J. Math. Phys.* **53** (2012), n° 10, arXiv : 1205.1377v2 [math.DG].
- [18] ———, « Gluing construction of initial data with Kerr-de Sitter ends », *Ann. H. Poincaré* **14** (2013), n° 5, p. 1109-1134.
- [19] J. CORVINO, « Scalar curvature deformation and a gluing construction for the Einstein constraint equations », *Comm. Math. Phys.* **214** (2000), n° 1, p. 137-189.
- [20] J. CORVINO, M. EICHMAIR & P. MIAO, « Deformation of scalar curvature and volume », *Math. Ann.* (2013), Online DOI 10.1007/s00208-013-0903-8.
- [21] J. CORVINO & R. SCHOEN, « On the asymptotics for the vacuum Einstein constraint equations », *J. Diff. Geom.* **73** (2006), n° 2, p. 185-217.
- [22] E. DELAY, « Localized gluing of Riemannian metrics in interpolating their scalar curvature », *Diff. Geom. Appl.* **29** (2011), n° 3, p. 433-439.
- [23] ———, « Smooth compactly supported solutions of some underdetermined elliptic PDE, with gluing applications », *Comm. PDE* **37** (2012), n° 10, p. 1689-1716.
- [24] E. DELAY & L. MAZZIERI, « Refined gluing for vacuum Einstein constraint equations », (2010), arXiv : 1003.4178 [math.DG].
- [25] Y. FOURÈS-BRUHAT, « Théorèmes d'existence pour certains systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires », *Acta Math* **88** (1952), p. 141-225.
- [26] M. HERZLICH, « Théorèmes de masse positive », *Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie* **16** (1998), p. 107-126.
- [27] E. HUMBERT, « Relativité générale (d'après M. Vaugon) et quelques problèmes mathématiques qui en sont issus », (2010), arXiv : 1004.2402v4 [math.DG].
- [28] J. ISENBERG, D. MAXWELL & D. POLLACK, « A gluing construction for non-vacuum solutions of the Einstein constraint equations », *Adv. Theor. Math. Phys.* **9** (2005), n° 1, p. 129-172, arXiv : gr-qc/0501083.
- [29] J. JAUREGUI, « Fill-ins of nonnegative scalar curvature, static metrics, and quasi-local mass », *Pacific J. Math.* **261** (2013), n° 2, p. 417-444.
- [30] J. KAZDAN, « Positive energy in general relativity », *Séminaire N. Bourbaki* **120** (1982), n° 593, p. 315-330.
- [31] J. M. LEE & T. H. PARKER, « The Yamabe problem », *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **17** (1987), n° 1, p. 37-91.
- [32] H. LINDBLAD & I. RODNIANSKI, « Global Existence for the Einstein Vacuum Equations in Wave Coordinates », *Comm. Math. Phys.* **256** (2005), n° 1, p. 43-110.
- [33] ———, « The global stability of Minkowski space-time in harmonic gauge », *Ann. Math.* **171** (2010), n° 3, p. 1401-1477.

- [34] D. MAERTEN, « Killing initial data revisited », *J. Math. Phys.* **45** (2004), n° 7, p. 2594-2599.
- [35] L. MAZZIERI, « Generalized gluing for Einstein constraint equations », *Calc. Var.* **34** (2009), p. 453-473.
- [36] B. MICHEL, « Geometric invariance of mass-like asymptotic invariants », *J. Math. Phys.* **52** (2011), n° 5, p. 052504, 14 pp., arXiv : 1012.3775v2 [math-ph].
- [37] V. MONCRIEF, « Space-time symmetries and linearization stability of the Einstein equations. I », *J. Math. Phys.* **16** (1975), n° 3, p. 493-498.
- [38] ———, « Space-time symmetries and linearization stability of the Einstein equations. II », *J. Math. Phys.* **17** (1976), n° 10, p. 1893-1902.
- [39] R. SCHOEN, « Variational theory for the total scalar curvature functional for Riemannian metrics and related topics », in *Topics in Calculus of Variations (Montecatini Terme, 1987)*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1365, Springer Berlin / Heidelberg, 1989, p. 120-154.
- [40] R. SCHOEN & S. YAU, « On the proof of the positive mass conjecture in general relativity », *Commun. Math. Phys.* **65** (1979), n° 1, p. 45-76.
- [41] ———, « Proof of the positive mass theorem II », *Commun. Math. Phys.* **79** (1981), p. 231-260.
- [42] E. WITTEN, « A simple proof of the positive energy theorem », *Commun. Math. Phys.* **80** (1981), p. 381-402.

Julien CORTIER
Institut des Hautes Études Scientifiques,
35, route de Chartres,
91440 Bures-sur-Yvette,
France
jcortier@ihes.fr